

IF184923 Riset Operasi Pertemuan ke-2

Misbakhul Munir **IRFAN SUBAKTI**

司馬伊凡

Мисбакхул Мунир **Ирфан Субакти**

Metode Simpleks

- Menyelesaikan masalah program linier (*linear program*, LP) yang meliputi banyak pertidaksamaan dan banyak variabel, yang digunakan dalam optimasi Matematika
- Metode primer untuk menyelesaikan program linier
- Program linier bentuk umum \rightarrow bentuk baku (*standard form*)
 - Bentuk baku \rightarrow titik awal untuk metode Simpleks
- Bentuk baku program linier
 - Semua kendala (constraints) berupa persamaan dengan sisi kanan (*right hand side*, *RHS*) non-negatif
- Digunakan perhitungan iteratif \rightarrow bentuk baku harus dibuat dalam bentuk tabel

Penyelesaian: Grafik & Metode Simpleks

- Soal

Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

(*objective function*)

Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \leq 100$

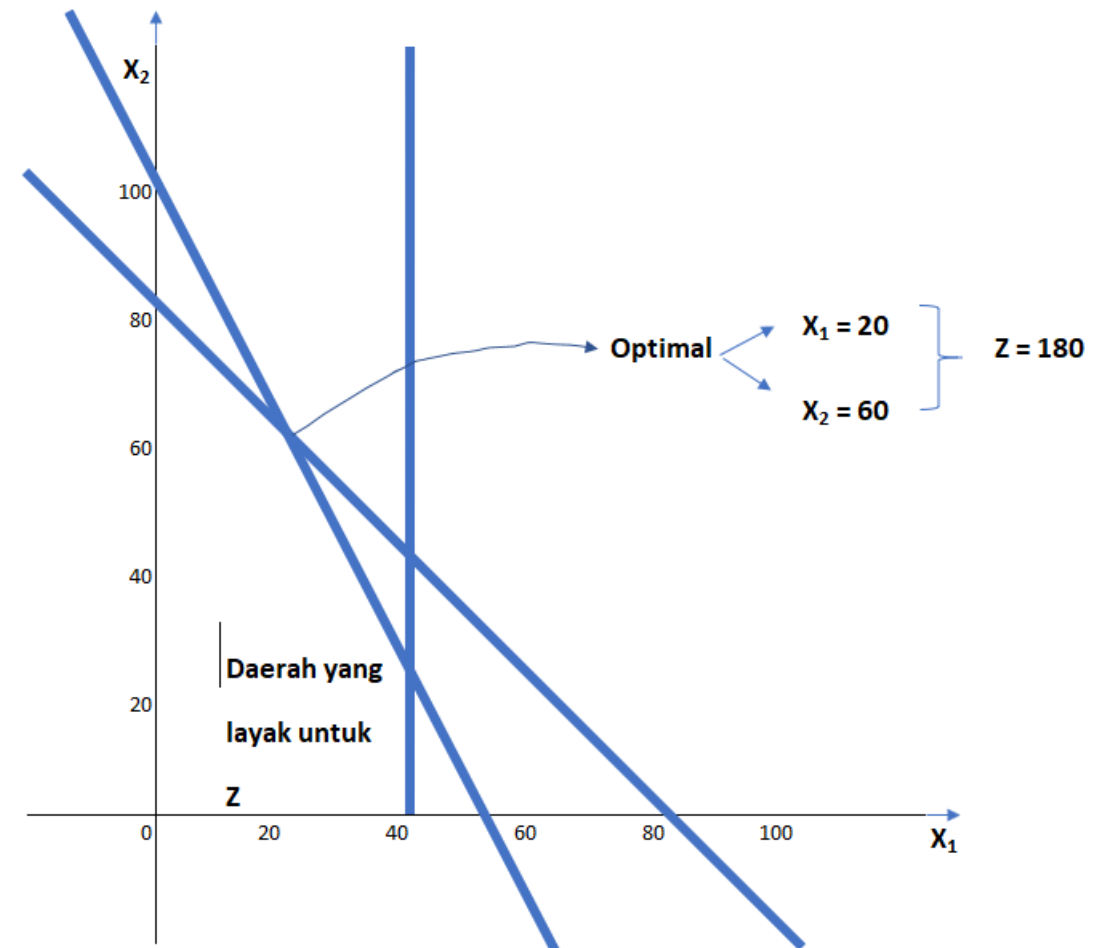
(*constraint func.*) $x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

- Penyelesaian

- Dengan grafik
- Metode Simpleks



Transformasi Bentuk Baku

- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan \leq dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel *slack* (*slack variable*)
 - Variabel slack harus non-negatif
 - Ditambahkan untuk setiap kendala (*constraint*) yang terlibat dalam fungsi tujuan
 - Variabel slack mengukur jumlah “sumberdaya yang tidak digunakan (*unused resource*)” atau “sumberdaya yang tidak digunakan dari sumberdaya yang mengganggu”
 - Misal: $3x_1 + 2x_2 \leq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 + S_1 = 2, S_1 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan \geq dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangi satu variabel surplus (*surplus variable*)
 - Variabel surplus mengukur jumlah “kelebihan sisi kiri (*left hand side, LHS*) dibandingkan sisi kanan (*right hand side, RHS*)” atau “kelebihan dari sumberdaya yang digunakan”
 - Misal: $3x_1 + 2x_2 \geq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 - S_2 = 2, S_2 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan persamaan bentuk umum, ditambahkan satu variabel buatan (*dummy/artificial variable*)

Metode Simpleks: Istilah

Pada sistem persamaan dengan n variabel dan m persamaan di mana $n \geq m$.

- Iterasi: tahapan perhitungan di mana nilai dalam perhitungan \rightarrow tergantung dari nilai tabel sebelumnya
- Variabel non basis (*nonbasic variable = NBV*): nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Jumlah NBV = derajat bebas dalam sistem persamaan
 - Set $n - m$ variabel sama dengan 0. Variabel-variabel ini yang disebut NBV.
- Variabel basis (*basic variable = BV*): nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, BV = variabel *slack* (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan \leq) atau variabel buatan (*surplus*, jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan \geq atau *dummy*, untuk $=$). Jumlah BV = jumlah fungsi kendala.
 - Selesaikan sistem untuk m variabel yang tersisa. Variabel-variabel ini yang disebut BV.

Misal:

Fungsi tujuan: Maks $Z = 1000x_1 + 1200x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

Fungsi kendala: $10x_1 + 5x_2 + S_1 = 200$

$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 60$

$x_1 + S_3 = 34$

$x_2 + S_4 = 14$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$

$(n - m) = 0$

$n = 6$ dan $m = 4$

$(6 - 4) = 2$ variabel = 0

NBV

Jika $x_1 = x_2 = 0$ maka

BV

$S_1 = 200$

$S_2 = 60$

$S_3 = 34$

$S_4 = 14$

Metode Simpleks: Istilah (lanjutan)

- Solusi/nilai kanan (*right hand side, RHS*): nilai sumber daya kendala yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan/solusi = jumlah sumber daya kendala awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
- Variabel *slack*: variabel yang ditambahkan ke model Matematika kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan \leq menjadi persamaan ($=$). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi/titik awal. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai BV. Tabel optimal \rightarrow digunakan untuk membantu menginterpretasikan sumberdaya kunci dan yang menganggur. Koefisien: +1. Koefisien dalam Z: 0.
- Variabel *surplus* (*negative slack variable*): variabel yang dikurangkan dari model Matematika kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan \geq menjadi persamaan ($=$). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai BV, karena kondisi matriks unit tak dapat terpenuhi, karena itu dalam tabel optimal \rightarrow tidak memiliki arti/fungsi. Koefisien: -1. Koefisien dalam Z: 0.
- Variabel buatan (*dummy/artificial variable*): variabel yang ditambahkan ke model Matematika kendala dengan bentuk \geq atau $=$ untuk difungsikan sebagai BV awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi, namun kemudian dihilangkan pada tahap berikutnya. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak mempunyai arti fisik/ekonomi, hanyalah fiksi semata. Sehingga dalam tabel optimal \rightarrow mengindikasikan solusi yang tidak layak

Metode Simpleks: Istilah (lanjutan)

- Kolom pivot (kolom kerja): kolom yang memuat variabel masuk (*entering variable = EV*). Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
- Baris pivot (baris kerja): salah satu baris di antara BV yang memuat variabel keluar (*leaving variable = LV*).
- Elemen pivot (elemen kerja): elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.
- Variabel masuk (*entering variable = EV*): variabel yang terpilih untuk menjadi BV pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu di antara NBV pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
- Variabel keluar (*leaving variable = LV*): variabel yang keluar dari BV pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu di antara BV pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Metode Simpleks: Tahapan

1. Periksa apakah tabel layak atau tidak. Solusi negatif → tidak layak
2. Tentukan kolom pivot. Dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai di sebelah kanan baris Z) dan tergantung dari bentuk fungsi tujuan
 - Maks → kolom pivot = kolom dengan koefisien paling negatif
 - Min → kolom pivot = kolom dengan koefisien positif terbesar
 - Jika kolom pivot ditandai & ditarik ke atas → didapat variabel masuk (EV = *entering variable*)
 - Jika nilai paling negatif (Maks) atau positif terbesar (Min) lebih dari 1 → pilih satu sembarang
3. Tentukan baris pivot. Ditentukan setelah membagi nilai solusi dengan nilai kolom pivot yang bersesuaian (nilai yang terletak dalam 1 baris)
 - Nilai negatif dan 0 pada kolom pivot diabaikan → tidak ikut menjadi pembagi
 - Baris pivot adalah baris dengan rasio pembagian terkecil
 - Jika baris pivot ditandai dan ditarik ke kiri → didapat variabel keluar (LV = *leaving variable*)
 - Jika rasio pembagian terkecil lebih dari satu → pilih satu sembarang
4. Tentukan elemen pivot. Nilai yang terletak pada perpotongan kolom & baris pivot
5. Bentuk tabel simpleks baru. Dibentuk dengan pertama-tama menghitung nilai baris pivot baru.
 - Baris pivot baru → baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot
 - Baris baru lainnya: tujuan → menjadikan 0 untuk kolom NBV. Baris baru lainnya merupakan pengurangan nilai kolom pivot baris yang bersangkutan dikalikan baris pivot baru dalam satu kolom terhadap baris lamanya yang terletak pada kolom tersebut
- Periksa apakah tabel sudah optimal → koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris Z) dan tergantung dari bentuk tujuan
 - Maks → optimal, jika semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0
 - Min → optimal, jika semua nilai pada baris Z sudah negatif atau 0
 - Jika belum → kembali ke langkah no 2, jika sudah optimal → dapatkan solusi optimalnya

Metode Simpleks: Contoh

- Soal

Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \leq 100$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Jadikan bentuk baku

- Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

- $Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$

- Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 + S_1 = 100$

- $x_1 + x_2 + S_2 = 80$

- $x_1 + S_3 = 40$

- $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2. BV $\rightarrow S_1, S_2, S_3$

NBV $\rightarrow x_1, x_2$

Metode Simpleks: Tabel

	x_1 EV	x_2	S_1	S_2	S_3	Solusi	
Z	-3	-2	0	0	0	0	R_0
S_1	2	1	1	0	0	100	R_1
S_2	1	1	0	1	0	80	R_2
S_3	1 pivot	0	0	0	1	40	LV R_3
Z	0	-2 EV	0	0	3	120	
S_1	0	1 pivot	1	0	-2	20	LV
S_2	0	1	0	1	-1	40	
x_1	1	0	0	0	1	40	
Z	0	0	2	0	-1 EV	160	
x_2	0	1	1	0	-2	20	
S_2	0	0	-1	1	1 pivot	20	LV
x_1	1	0	0	0	1	40	
Z	0	0	1	1	0	180	Optimal
x_2	0	1	-1	2	0	60	$x_1 = 20$
S_3	0	0	-1	1	1	20	$x_2 = 60$
x_1	1	0	1	-1	0	20	$Z = 180$

- Optimal: $x_1 = 20$, $x_2 = 60$,
- Keuntungan maksimal, $Z = 3 \times 20 + 2 \times 60 = 180$

Tabel Simpleks: Penjelasan

- Apakah tabel layak? Kalau solusinya negatif (-) \rightarrow tidak layak. Solusi = 0 \rightarrow layak.
- Tentukan kolom pivot. Pada Z \rightarrow karena merupakan fungsi maks \rightarrow cari kolom berkoefisien paling negatif $\rightarrow -3 \rightarrow$ kolom $x_1 \rightarrow$ EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
 - $100/2 = 50, 80/1 = 80, 40/1 = 40 \rightarrow$ rasio terkecil 40 \rightarrow baris $S_3 \rightarrow$ LV (R_3 , row/baris ke-3)
 - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
 - Baris pivot baru \rightarrow baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. $S_3 \mid 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 40 \rightarrow x_1 \mid 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 40$
 - Baris baru lainnya: tujuan \rightarrow menjadikan 0 untuk kolom NBV
 - Z: $R'_0 = 3R_3 + R_0 \rightarrow 3 \cdot 1 + (-3) = 0, 3 \cdot 0 + (-2) = -2, 3 \cdot 0 + 0 = 0, 3 \cdot 0 + 0 = 0, 3 \cdot 1 + 0 = 3, 3 \cdot 40 + 0 = 120. Z \mid 0 \ -2 \ 0 \ 0 \ 3 \mid 120$
 - S_1 : $R'_1 = -2R_3 + R_1 \rightarrow -2 \cdot 1 + 2 = 0, -2 \cdot 0 + 1 = 1, -2 \cdot 0 + 1 = 1, -2 \cdot 0 + 0 = 0, -2 \cdot 1 + 0 = -2, -2 \cdot 40 + 100 = 20. S_1 \mid 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 20$
 - S_2 : $R'_2 = -R_3 + R_2 \rightarrow -1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, -1 + 0 = -1, -40 + 80 = 40. S_2 \mid 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \mid 40$
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Belum, ada -2. Kembali ke langkah 2 (tentukan kolom pivot)

Tabel Simpleks: Penjelasan (lanjutan)

- Tentukan kolom pivot. Pada Z \rightarrow karena merupakan fungsi maks \rightarrow cari kolom berkoefisien paling negatif $\rightarrow -2 \rightarrow$ kolom $x_2 \rightarrow$ EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
 - $20/1 = 20, 40/1 = 40, 40/0 \rightarrow$ diabaikan. Rasio terkecil 20 \rightarrow baris $S_1 \rightarrow$ LV (R'_1 , row/baris ke-1)
 - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
 - Baris pivot baru \rightarrow baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. $S_1 \mid 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 20 \rightarrow x_2 \mid 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 20$
 - Baris baru lainnya: tujuan \rightarrow menjadikan 0 untuk kolom NBV
 - Z: $R''_0 = 2R'_1 + R'_0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 = 0, 2 \cdot 1 + (-2) = 0, 2 \cdot 1 + 0 = 2, 2 \cdot 0 + 0 = 0, 2 \cdot (-2) + 3 = -1, 2 \cdot 20 + 120 = 160$. $Z \mid 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1 \mid 160$
 - S_2 : $R''_2 = -R'_1 + R'_2 \rightarrow 0 + 0 = 0, -1 + 1 = 0, -1 + 0 = -1, 0 + 1 = 1, -(-2) + (-1) = 1, -20 + 40 = 20$. $S_2 \mid 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 20$
 - x_1 : $R''_3 =$ elemen pada kolom pivot adalah 0 \rightarrow nilai tetap, nilai baris baru = nilai baris lama $\rightarrow x_1 \mid 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 40$
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Belum, ada -1. Kembali ke langkah 2 (tentukan kolom pivot)

Tabel Simpleks: Penjelasan (lanjutan)

- Tentukan kolom pivot. Pada Z \rightarrow karena merupakan fungsi maks \rightarrow cari kolom berkoefisien paling negatif $\rightarrow -1 \rightarrow$ kolom $S_3 \rightarrow$ EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
 - $20/-2 \rightarrow$ diabaikan. $20/1 = 20$, $40/1 = 40$. Rasio terkecil 20 \rightarrow baris $S_2 \rightarrow$ LV (R'_2 , row/baris ke-2)
 - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
 - Baris pivot baru \rightarrow baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. $S_2 \mid 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 20 \rightarrow S_3 \mid 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 20$
 - Baris baru lainnya: tujuan \rightarrow menjadikan 0 untuk kolom NBV
 - Z: $R'''_0 = R''_2 + R''_0 \rightarrow 0+0=0, 0+0=0, -1+2=1, 1+0=1, 1+(-1)=0, 20+120=180$. Z $\mid 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 180$
 - x_2 : $R'''_1 = 2R''_2 + R''_1 \rightarrow 2.0+0=0, 2.0+1=1, 2.(-1)+1=-1, 2.1+0=2, 2.1+(-2)=0, 2.20+20=60$. $x_2 \mid 0 \ 1 \ -1 \ 2 \ 0 \mid 60$
 - x_1 : $R'''_3 = -R''_2 + R''_3 \rightarrow 0+1=1, 0+0=0, -(-1)+0=1, -1+0=-1, -1+1=0, -20+40=20$. $x_1 \mid 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \mid 20$
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Sudah positif atau 0 \rightarrow tabel sudah optimal.
 - Nilai optimal Z = 180, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$