IF184302 Aljabar Linier Pertemuan ke-2

Misbakhul Munir IRFAN SUBAKTI
司馬伊凡
Мисбакхул Мунир Ирфан Субакти

Metode Simpleks

- Menyelesaikan masalah program linier (*linear program*, LP) yang meliputi banyak pertidaksamaan dan banyak variabel, yang digunakan dalam optimasi Matematika
- Metode primer untuk menyelesaikan program linier
- Program linier bentuk umum → bentuk baku (*standard form*)
  - Bentuk baku → titik awal untuk metode Simpleks
- Bentuk baku program linier
  - Semua kendala (constraints) berupa persamaan dengan sisi kanan (*right hand side, RHS*) non-negatif
- Digunakan perhitungan iteratif → bentuk baku harus dibuat dalam bentuk tabel

Penyelesaian: Grafik & Metode Simpleks

- Soal

  Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

  (objective function)

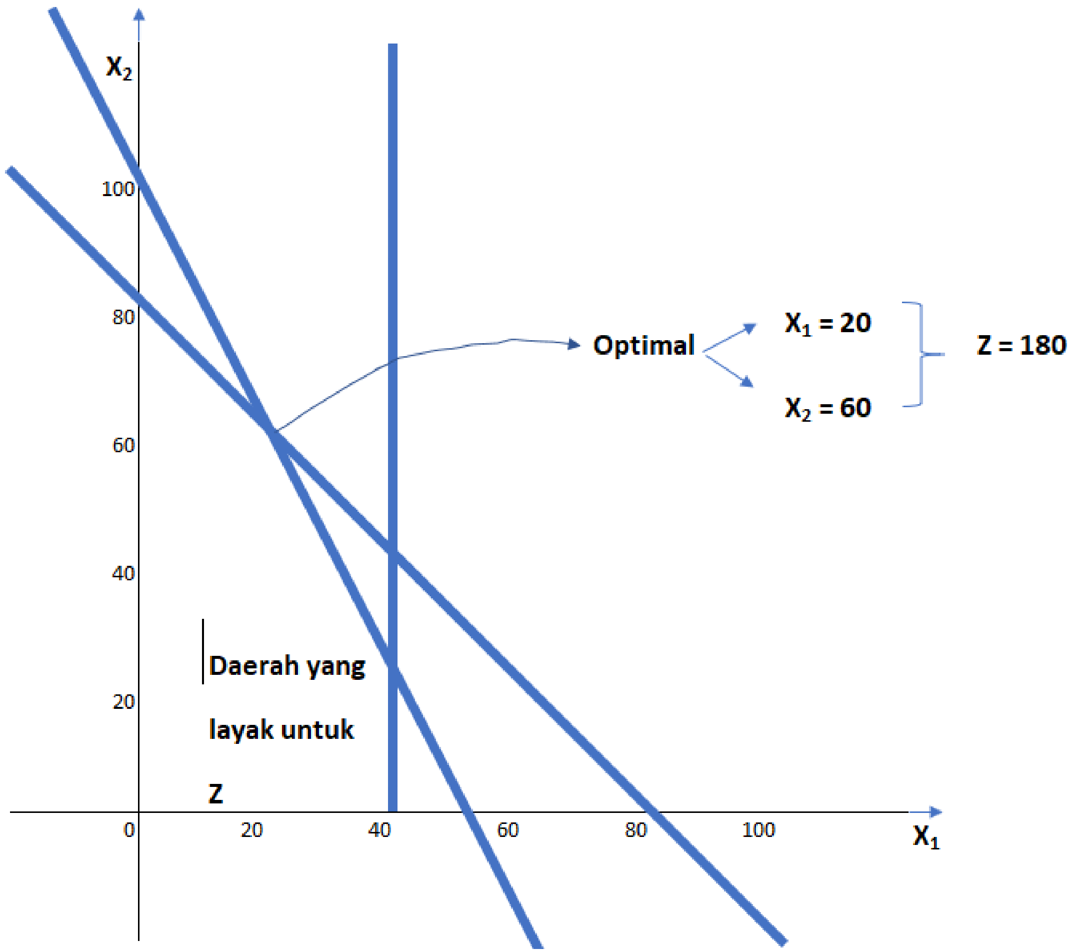
  Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \leq 100$

  (constraint func.) $x_1 + x_2 \leq 80$

  $x_1 \leq 40$

  $x_1, x_2 \geq 0$

- Penyelesaian
  - Dengan grafik
  - Metode Simpleks



Transformasi Bentuk Baku

- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan ≤ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel *slack* (*slack variable*)
  - Variabel slack harus non-negatif
  - Ditambahkan untuk setiap kendala (*constraint*) yang terlibat dalam fungsi tujuan
  - Variabel slack mengukur jumlah "sumberdaya yang tidak digunakan (*unused resource*)" atau "sumberdaya yang tidak digunakan dari sumberdaya yang menganggur"
  - Misal: $3x_1 + 2x_2 \leq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 + S_1 = 2$, $S_1 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan ≥ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangkan satu variabel surplus (*surplus variable*)
  - Variabel surplus mengukur jumlah "kelebihan sisi kiri (*left hand side, LHS*) dibandingkan sisi kanan (*right hand side, RHS*)" atau "kelebihan dari sumberdaya yang digunakan"
  - Misal: $3x_1 + 2x_2 \geq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 - S_2 = 2$, $S_2 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan persamaan bentuk umum, ditambahkan satu variabel buatan (*dummy/artificial variable*)

Metode Simpleks: Istilah

Pada sistem persamaan dengan *n* variabel dan *m* persamaan di mana $n \geq m$.

- Iterasi: tahapan perhitungan di mana nilai dalam perhitungan → tergantung dari nilai tabel sebelumnya
- Variabel non basis (*nonbasic variable = NBV*): nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Jumlah NBV = derajat bebas dalam sistem persamaan
    - Set $n - m$ variabel sama dengan 0. Variabel-variabel ini yang disebut NBV.
- Variabel basis (*basic variable = BV*): nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, BV = variabel *slack* (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan ≤) atau variabel buatan (*surplus*, jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan ≥ atau *dummy*, untuk =). Jumlah BV = jumlah fungsi kendala.
    - Selesaikan sistem untuk *m* variabel yang tersisia. Variabel-variabel ini yang disebut BV.

Misal:

Fungsi tujuan: Maks $Z = 1000x_1 + 1200x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

Fungsi kendala:

$10x_1 + 5x_2 + S_1 = 200$

$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 60$

$x_1 + S_3 = 34$

$x_2 + S_4 = 14$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$

$(n - m) = 0$

$n = 6$ dan $m = 4$

$(6 - 4) = 2$ variabel = 0

NBV		BV
Jika $x_1 = x_2 = 0$	maka	$S_1 = 200$
		$S_2 = 60$
		$S_3 = 34$
		$S_4 = 14$

Metode Simpleks: Istilah (lanjutan)

- Solusi/nilai kanan (*right hand side, RHS*): nilai sumber daya kendala yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan/solusi = jumlah sumber daya kendala awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
- Variabel *slack*: variabel yang ditambahkan ke model Matematika kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≤ menjadi persamaan (=). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi/titik awal. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai BV. Tabel optimal → digunakan untuk membantu menginterpretasikan sumberdaya kunci dan yang menganggur. Koefisien: +1. Koefisien dalam Z: 0.
- Variabel *surplus (negative slack variable)*: variabel yang dikurangkan dari model Matematika kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≥ menjadi persamaan (=). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai BV, karena kondisi matriks unit tak dapat terpenuhi, karena itu dalam tabel optimal → tidak memiliki arti/fungsi . Koefisien: -1. Koefisien dalam Z: 0.
- Variabel buatan (*dummy/artificial variable*): variabel yang ditambahkan ke model Matematika kendala dengan bentuk ≥ atau = untuk difungsikan sebagai BV awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi, namun kemudian dihilangkan pada tahap berikutnya. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak mempunyai arti fisik/ekonomi, hanyalah fiksi semata. Sehingga dalam tabel optimal → mengindikasikan solusi yang tidak layak

Metode Simpleks: Istilah (lanjutan)

- Kolom pivot (kolom kerja): kolom yang memuat variabel masuk (*entering variable = EV*). Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
- Baris pivot (baris kerja): salah satu baris di antara BV yang memuat variabel keluar (*leaving variable = LV*).
- Elemen pivot (elemen kerja): elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.
- Variabel masuk (*entering variable = EV*): variabel yang terpilih untuk menjadi BV pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu di antara NBV pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
- Variabel keluar (*leaving variable = LV*): variabel yang keluar dari BV pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu di antara BV pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Metode Simpleks: Tahapan

1. Periksa apakah tabel layak atau tidak. Solusi negatif → tidak layak
2. Tentukan kolom pivot. Dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai di sebelah kanan baris Z) dan tergantung dari bentuk fungsi tujuan
   - Maks → kolom pivot = kolom dengan koefisien paling negatif
   - Min → kolom pivot = kolom dengan koefisien positif terbesar
   - Jika kolom pivot ditandai & ditarik ke atas → didapat variabel masuk (EV = *entering variable*)
   - Jika nilai paling negatif (Maks) atau positif terbesar (Min) lebih dari 1 → pilih satu sembarang
3. Tentukan baris pivot. Ditentukan setelah membagi nilai solusi dengan nilai kolom pivot yang bersesuaian (nilai yang terletak dalam 1 baris)
   - Nilai negatif dan 0 pada kolom pivot diabaikan → tidak ikut menjadi pembagi
   - Baris pivot adalah baris dengan rasio pembagian terkecil
   - Jika baris pivot ditandai dan ditarik ke kiri → didapat variabel keluar (LV = *leaving variable*)
   - Jika rasio pembagian terkecil lebih dari satu → pilih satu sembarang
4. Tentukan elemen pivot. Nilai yang terletak pada perpotongan kolom & baris pivot
5. Bentuk tabel simpleks baru. Dibentuk dengan pertama-tama menghitung nilai baris pivot baru.
   - Baris pivot baru → baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot
   - Baris baru lainnya: tujuan → menjadikan 0 untuk kolom NBV. Baris baru lainnya merupakan pengurangan nilai kolom pivot baris yang bersangkutan dikalikan baris pivot baru dalam satu kolom terhadap baris lamanya yang terletak pada kolom tersebut

- Periksa apakah tabel sudah optimal → koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris Z) dan tergantung dari bentuk tujuan
  - Maks → optimal, jika semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0
  - Min → optimal, jika semua nilai pada baris Z sudah negatif atau 0
  - Jika belum → kembali ke langkah no 2, jika sudah optimal → dapatkan solusi optimalnya

Metode Simpleks: Contoh

- Soal

  Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

  Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \le 100$

  $x_1 + x_2 \le 80$

  $x_1 \le 40$

  $x_1, x_2 \ge 0$

1. Jadikan bentuk baku
   - Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$
   - $Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$
   - Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 + S_1 = 100$
   - $x_1 + x_2 + S_2 = 80$
   - $x_1 + S_3 = 40$
   - $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$
2. BV → S_1, S_2, S_3

   NBV → x_1, x_2

Metode Simpleks: Tabel

	x_1 EV	x_2	S_1	S_2	S_3	Solusi		
Z	-3	-2	0	0	0	0		R_0
S_1	2	1	1	0	0	100		R_1
S_2	1	1	0	1	0	80		R_2
S_3	1 pivot	0	0	0	1	40	LV	R_3
Z	0	-2 EV	0	0	3	120		
S_1	0	1 pivot	1	0	-2	20	LV	
S_2	0	1	0	1	-1	40		
x_1	1	0	0	0	1	40		
Z	0	0	2	0	-1 EV	160		
x_2	0	1	1	0	-2	20		
S_2	0	0	-1	1	1 pivot	20	LV	
x_1	1	0	0	0	1	40		
Z	0	0	1	1	0	180		Optimal
x_2	0	1	-1	2	0	60		$x_1 = 20$
S_3	0	0	-1	1	1	20		$x_2 = 60$
x_1	1	0	1	-1	0	20		$Z = 180$

- Optimal: $x_1 = 20$, $x_2 = 60$,
- Keuntungan maksimal, $Z = 3 \times 20 + 2 \times 60 = 180$

Tabel Simpleks: Penjelasan

- Apakah tabel layak? Kalau solusinya negatif (-) → tidak layak. Solusi = 0 → layak.
- Tentukan kolom pivot. Pada Z → karena merupakan fungsi maks → cari kolom berkoefisien paling negatif → -3 → kolom x_1 → EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
  - 100/2 = 50, 80/1 = 80, 40/1 = 40 → rasio terkecil 40 → baris S_3 → LV (R_3, *row*/baris ke-3)
  - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
  - Baris pivot baru → baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. S_3 | 1 0 0 0 1 | 40 → x_1 | 1 0 0 0 1 | 40
  - Baris baru lainnya: tujuan → menjadikan 0 untuk kolom NBV
  - Z: $R'_0 = 3R_3 + R_0$ → 3.1+(-3)=0, 3.0+(-2)=-2, 3.0+0=0, 3.0+0=0, 3.1+0=3, 3.40+0=120. Z | 0 -2 0 0 3 | 120
  - S_1: $R'_1 = -2R_3 + R_1$ → -2.1+2=0, -2.0+1=1, -2.0+1=1, -2.0+0=0, -2.1+0=-2, -2.40+100=20. S_1 | 0 1 1 0 -2 | 20
  - S_2: $R'_2 = -R_3 + R_2$ → -1+1=0, 0+1=1, 0+0=0, 0+1=1, -1+0=-1, -40+80=40. S_2 | 0 1 0 1 -1 | 40
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Belum, ada -2. Kembali ke langkah 2 (tentukan kolom pivot)

Tabel Simpleks: Penjelasan (lanjutan)

- Tentukan kolom pivot. Pada Z → karena merupakan fungsi maks → cari kolom berkoefisien paling negatif → -2 → kolom x_2 → EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
  - 20/1 = 20, 40/1 = 40, 40/0 → diabaikan. Rasio terkecil 20 → baris S_1 → LV (R'_1, *row*/baris ke-1)
  - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
  - Baris pivot baru → baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. S_1 | 0 1 1 0 -2 | 20 → x_2 | 0 1 1 0 -2 | 20
  - Baris baru lainnya: tujuan → menjadikan 0 untuk kolom NBV
  - Z: $R''_0 = 2R'_1 + R'_0$ → 2.0+0=0, 2.1+(-2)=0, 2.1+0=2, 2.0+0=0, 2.(-2)+3=-1, 2.20+120=160. Z | 0 0 2 0 -1 | 160
  - S_2: $R''_2 = -R'_1 + R'_2$ → 0+0=0, -1+1=0, -1+0=-1, 0+1=1, -(-2)+(-1)=1, -20+40=20. S_2 | 0 0 -1 1 1 | 20
  - x_1: R''_3 = elemen pada kolom pivot adalah 0 → nilai tetap, nilai baris baru = nilai baris lama → x_1 | 1 0 0 0 1 | 40
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Belum, ada -1. Kembali ke langkah 2 (tentukan kolom pivot)

Tabel Simpleks: Penjelasan (lanjutan)

- Tentukan kolom pivot. Pada Z → karena merupakan fungsi maks → cari kolom berkoefisien paling negatif → -1 → kolom S_3 → EV.
- Tentukan baris pivot. Nilai negatif dan 0 diabaikan. Cari rasio pembagian terkecil.
  - 20/-2 → diabaikan. 20/1 = 20, 40/1 = 40. Rasio terkecil 20 → baris S_2 → LV (R'_2, *row*/baris ke-2)
  - Elemen pivot = 1
- Bentuk tabel Simplek baru
  - Baris pivot baru → baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. S_2 | 0 0 -1 1 1 | 20 → S_3 | 0 0 -1 1 1 | 20
  - Baris baru lainnya: tujuan → menjadikan 0 untuk kolom NBV
  - Z: $R'''_0 = R''_2 + R''_0$ → 0+0=0, 0+0=0, -1+2=1, 1+0=1, 1+(-1)=0, 20+120=180. Z | 0 0 1 1 0 | 180
  - x_2: $R'''1 = 2R''_2 + R''_1$ → 2.0+0=0, 2.0+1=1, 2.(-1)+1=-1, 2.1+0=2, 2.1+(-2)=0, 2.20+20=60. x_2 | 0 1 -1 2 0 | 60
  - x_1: $R'''_3 = -R''_2 + R''_3$ → 0+1=1, 0+0=0, -(-1)+0=1, -1+0=-1, -1+1=0, -20+40=20. x_1 | 1 0 1 -1 0 | 20
- Apakah tabel sudah optimal? Semua nilai pada baris Z sudah positif atau 0? Sudah positif atau 0 → tabel sudah optimal.
  - Nilai optimal Z = 180, x_1 = 20, x_2 = 60

Sistem Persamaan Linier (SPL)

- Contoh:
  - g_1: $x + y = 3$
  - g_2: $3x - 5y = 1$
- Penyelesaian
  - Cara Biasa (ingat jaman kita SMA)
  - Eliminasi Gauss
  - Eliminasi Gauss-Jordan
  - Matlab/program/tools lainnya

Penyimpangan pada Penyelesaian SPL

- Contoh:

$$x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 = 1$$
$$1/2x_1 + 1/3x_2 + 1/4x_3 = 0$$
$$1/3x_1 + 1/4x_2 + 1/5x_3 = 0$$

Didapat penyelesaian $x_1 = 9$, $x_2 = -36$, dan $x_3 = 30$

Jika SPL di atas ditulis dalam keakuratan dua desimal:

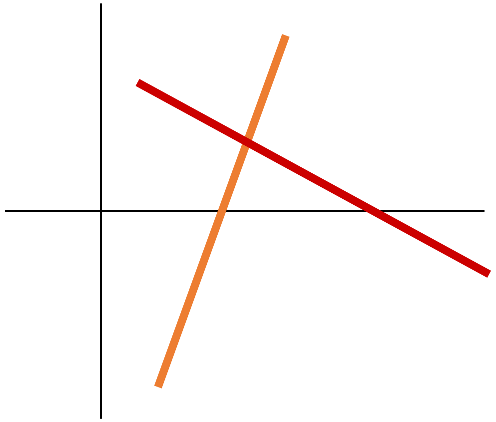
$$x_1 + 0,5x_2 + 0,33x_3 = 1$$
$$0,5x_1 + 0,33x_2 + 0,25x_3 = 0$$
$$0,33x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_3 = 0$$

Didapat penyelesaian $x_1 \approx 55,55$; $x_2 \approx -277,778$; dan $x_3 \approx 255,556$

Penyajian Geometrik

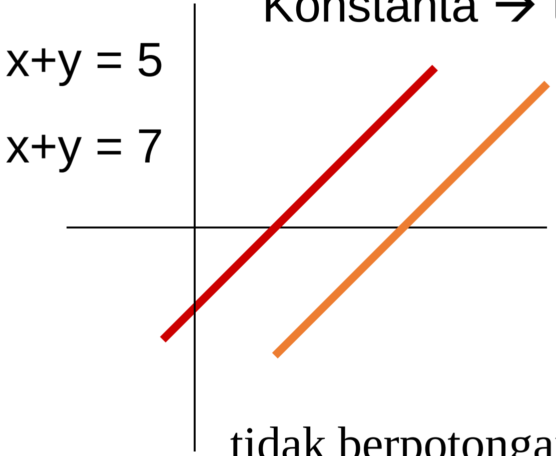
- Contoh:
  - f_1: $x + y = 3$
  - f_2: $3x - 5y = 1$
  - Penyelesaian: fungsi f_1 dan f2 berpotongan di titik (2, 1)

- Kemungkinan grafik:



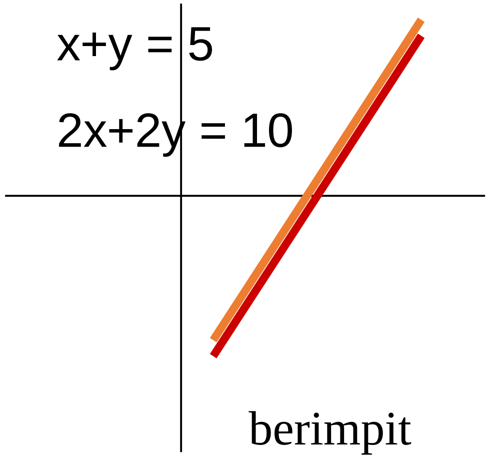
berpotongan di satu titik

Var → sama
Konstanta → tidak sama



tidak berpotongan

Kelipatan



berimpit

Penyelesaian SPL

- Cara Biasa (ingat jaman kita SMA)

I.
$$
\begin{array}{rcl}
x + y = 3 & \rightarrow & 3x + 3y = 9 \\
3x - 5y = 1 & \rightarrow & \underline{3x - 5y = 1} \; - \\
 & & 8y = 8 \rightarrow \quad y = 1 \\
\end{array}
$$

$$3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

II. $y = 3 - x$

$$3x - 5(3 - x) = 1 \text{ atau } 3x - 15 + 5x = 1 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$$

$$y = 3 - x \rightarrow y = 1$$

Penyelesaian SPL (lanjutan)

- Eliminasi Gauss

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{bentuk matriks } augmented]{\text{ditulis dalam}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

lalu diusahakan berbentuk

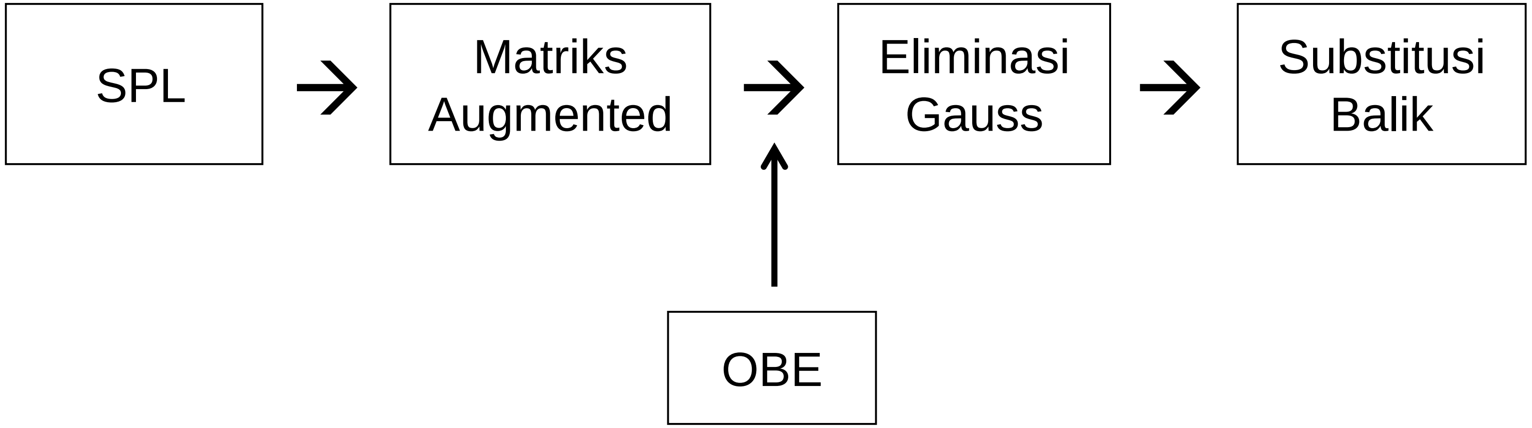
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array}\right)$$

dengan proses: Operasi Baris Elementer (OBE)

(Elementary Row Operation - ERO)

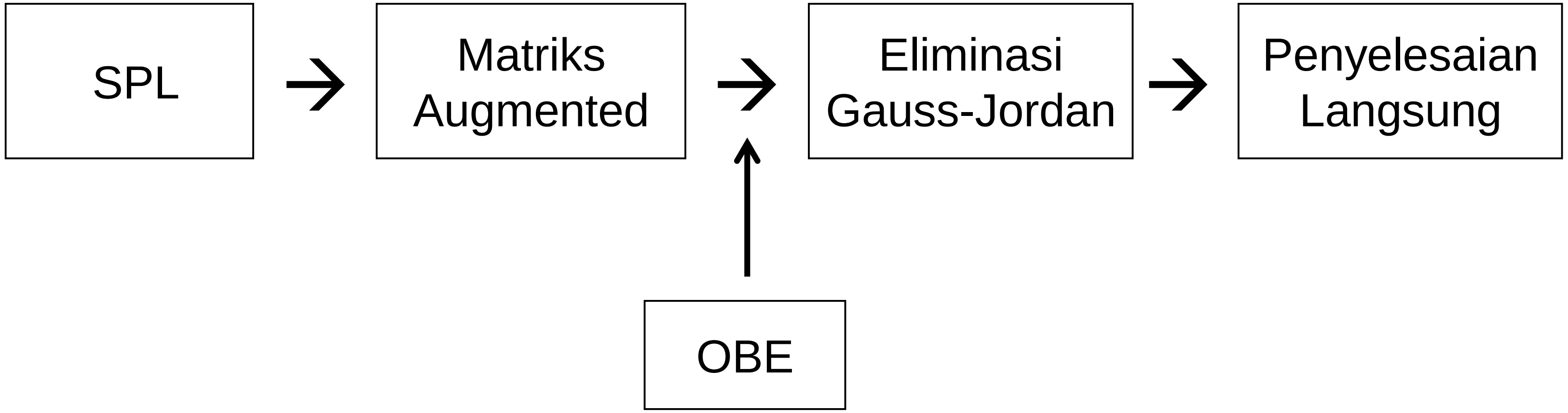
Penyelesaian SPL (lanjutan)

- Ringkasan Eliminasi Gauss:



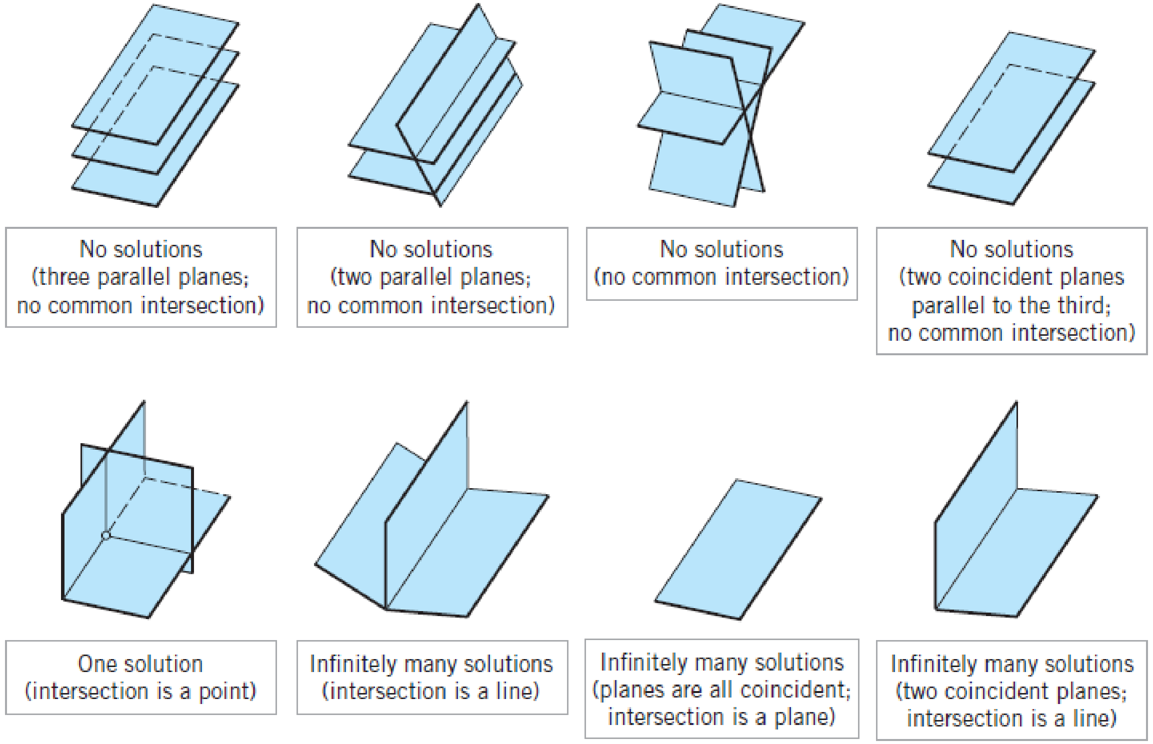
Penyelesaian SPL (lanjutan)

- Ringkasan Eliminasi Gauss-Jordan:



SPL dan Matriks

- Bentuk baku
- PL Homogenous (homogenous linear equation)
- PL
  - Variables → unknows
  - Solution
  - Ordered *n-tuple*



No solutions (three parallel planes; no common intersection)

No solutions (two parallel planes; no common intersection)

No solutions (no common intersection)

No solutions (two coincident planes parallel to the third; no common intersection)

One solution (intersection is a point)

Infinitely many solutions (intersection is a line)

Infinitely many solutions (planes are all coincident; intersection is a plane)

Infinitely many solutions (two coincident planes; intersection is a line)

Matriks

- Operasi baris elementer (OBE) (*elementary row operations*, ERO)
- Bentuk *row echelon* & *reduced row echelon*
- Sistem homogenous (*homogenous system*)
- Substitusi balik (*back substitution*)
- Posisi dan kolom pivot (*pivot positions* & *columns*)
- Matriks dan operasi matriks (*matrices* & *matrix operations*)