IF184923 Riset Operasi
Pertemuan ke-3

Misbakhul Munir IRFAN SUBAKTI
司馬伊凡
Мисбакхул Мунир Ирфан Субакти

Pemrograman Linier & Optimasi

- Pemrograman Linier (*Linier Programming, LP*)
  - Program yang variabelnya berpangkat 1
- Perencanaan suatu hal untuk mendapatkan hasil optimal
  - Maksimal → keuntungan
  - Minimal → biaya
- Optimasi: Maks atau Min suatu fungsi linier dari variabel keputusan → fungsi tujuan
- Nilai variabel keputusan harus memenuhi suatu himpunan kendala/batasan
- Model program linier: model Matematika perumusan masalah alokasi sumber daya untuk kegiatan/proses tertentu → formula persamaan
- Pemodelan persoalan dengan LP → setiap model LP mempunyai 3 komponen:
  - Variabel keputusan → variabel yang mempengaruhi pencapaian tujuan maksimal
  - Tujuan yang ingin dioptimasi
  - Kendala/batasan yang harus dipenuhi
  - Model → solusi yang layak (*feasible solution*): nilai yang memenuhi kendala/batasan → solusi optimal

Teknik Penyelesaian Model LP

- Solusi grafik
- Transformasi model LP → bentuk baku
- Metode Simpleks
- Penyelesaian model LP dengan fungsi kendala/batasan bertanda ≥ atau =
  - Teknik M → metode penalti (*penalty)*
  - Teknik 2 Fase

ZMaks → (-) MR
ZMin → (+) MR

Penyelesaian Model LP: Variabel & Kendala

- Solusi grafik → 2 variabel
- Metode Simpleks → lebih dari 2 variabel
- Tanda kendala/batasan
  - ≤ → tambahkan S_i (*slack*) -> metode Simpleks
  - ≥ → kurangkan S_i (*surplus*) dan tambahkan variabel buatan/*artificial* (R_i)
  - = → tambahkan variabel buatan/*artificial* (R_i)

Teknik M & Teknik 2 Fase

Transformasi Bentuk Baku

- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan ≤ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel *slack* (*slack variable*)
  - Variabel slack harus non-negatif
  - Ditambahkan untuk setiap kendala (*constraint*) yang terlibat dalam fungsi tujuan
  - Variabel slack mengukur jumlah "sumberdaya yang tidak digunakan (*unused resource*)" atau "sumberdaya yang tidak digunakan dari sumberdaya yang menganggur"
  - Misal: $3x_1 + 2x_2 \leq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 + S_1 = 2$, $S_1 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan pertidaksamaan ≥ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangkan satu variabel surplus (*surplus variable*)
  - Variabel surplus mengukur jumlah "kelebihan sisi kiri (*left hand side, LHS*) dibandingkan sisi kanan (*right hand side, RHS*)" atau "kelebihan dari sumberdaya yang digunakan"
  - Misal: $3x_1 + 2x_2 \geq 2$, ditransformasikan menjadi $3x_1 + 2x_2 - S_2 = 2$, $S_2 \geq 0$
- Fungsi kendala dengan persamaan bentuk umum, ditambahkan satu variabel buatan (*dummy/artificial variable*)

Metode Simpleks

- Pertemuan ke-2

  Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

  Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \le 100$

  $x_1 + x_2 \le 80$

  $x_1 \le 40$

  $x_1, x_2 \ge 0$

1. Jadikan bentuk baku
   - Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$
   - $Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$
   - Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 + S_1 = 100$
   - $x_1 + x_2 + S_2 = 80$
   - $x_1 + S_3 = 40$
   - $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$
2. BV → S_1, S_2, S_3

   NBV → x_1, x_2

Metode Simpleks: Tabel

	x_1 EV	x_2	S_1	S_2	S_3	Solusi		
Z	-3	-2	0	0	0	0		R_0
S_1	2	1	1	0	0	100		R_1
S_2	1	1	0	1	0	80		R_2
S_3	1 pivot	0	0	0	1	40	LV	R_3
Z	0	-2 EV	0	0	3	120		
S_1	0	1 pivot	1	0	-2	20	LV	
S_2	0	1	0	1	-1	40		
x_1	1	0	0	0	1	40		
Z	0	0	2	0	-1 EV	160		
x_2	0	1	1	0	-2	20		
S_2	0	0	-1	1	1 pivot	20	LV	
x_1	1	0	0	0	1	40		
Z	0	0	1	1	0	180		Optimal
x_2	0	1	-1	2	0	60		$x_1 = 20$
S_3	0	0	-1	1	1	20		$x_2 = 60$
x_1	1	0	1	-1	0	20		$Z = 180$

- Optimal: $x_1 = 20$, $x_2 = 60$,
- Keuntungan maksimal, $Z = 3 \times 20 + 2 \times 60 = 180$

Metode Simpleks: Excel Solver

- Soal

  Fungsi tujuan: Maks $Z = 3x_1 + 2x_2$

  Fungsi kendala: $2x_1 + x_2 \leq 100$

  $x_1 + x_2 \leq 80$

  $x_1 \leq 40$

  $x_1, x_2 \geq 0$

- Masukkan data di atas dalam satu file Excel, seperti berikut.

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	Total	<, >, =	Batasan
2	Maks	3	2	0		
3	Kendala1	2	1	0	<=	100
4	Kendala2	1	1	0	<=	80
5	Kendala3	1	0	0	<=	40
6	Batas bawah	0	0			
7						
8		x1	x2	Z		
9	Solusi	0	0	0		

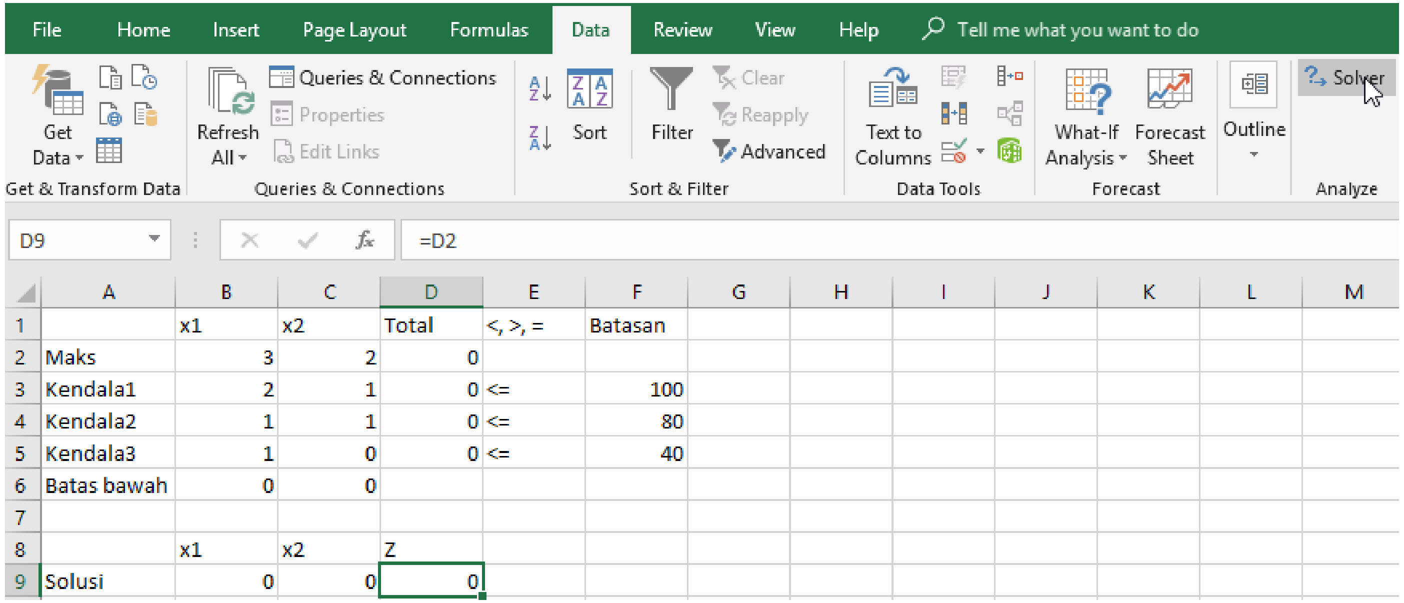
Masukkan nilai 0 pada sel B9 dan C9.

Pada sel D2, tuliskan “=SUMPRODUCT(B2:C2, B9: C9)”.

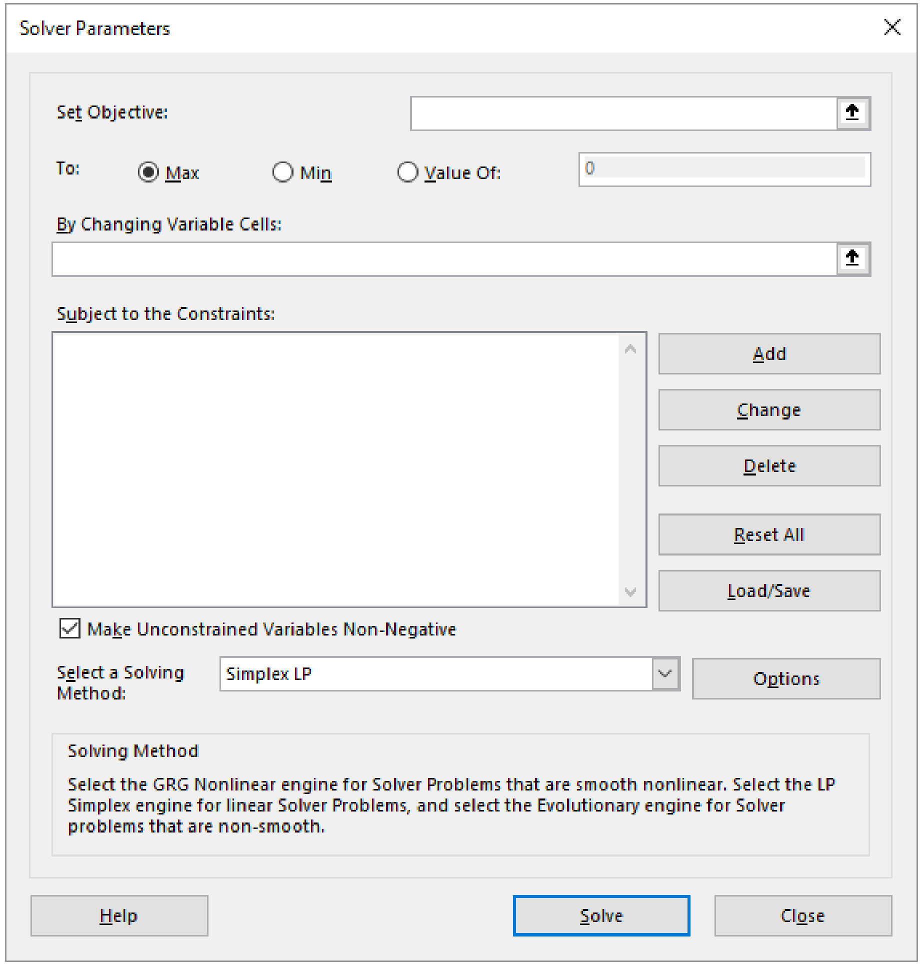
Salinkan (*copy*) sel D2 pada sel D3 sampai D5.

Pada sel D9, tuliskan “=D2”

Metode Simpleks: Excel Solver (lanjutan)

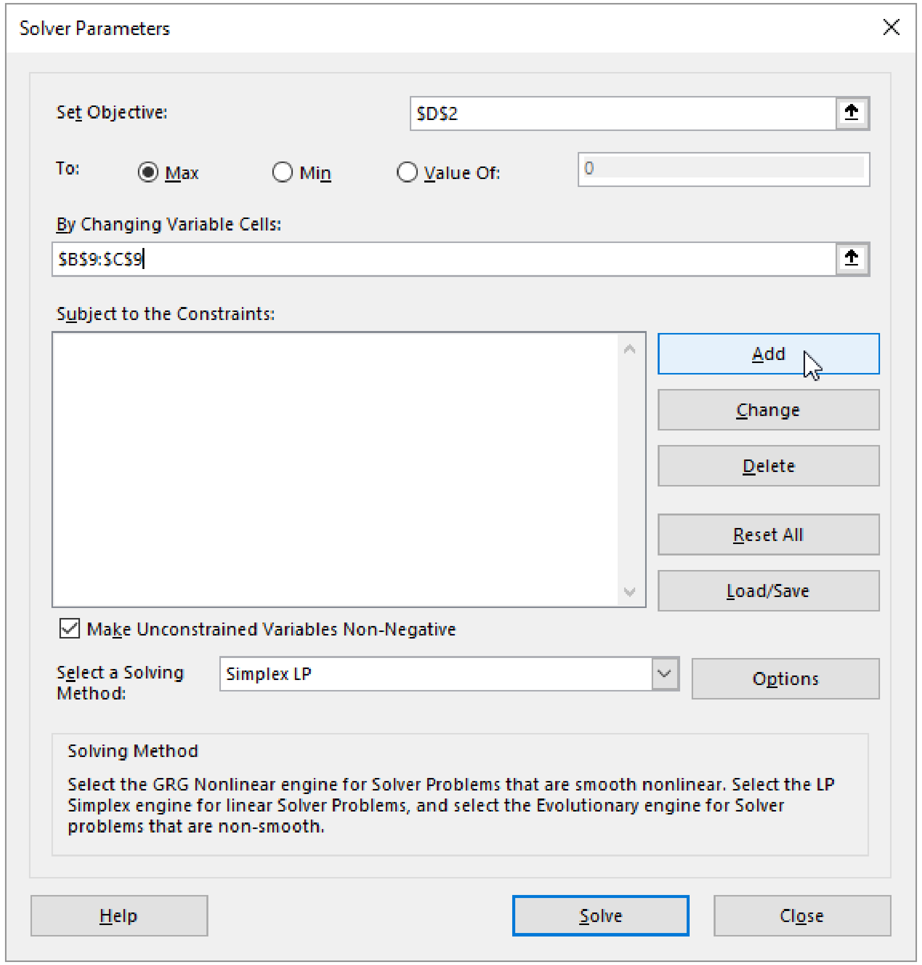


- Kemudian pilih (klik) menu Data > Solver
- Muncul *window* seperti di samping.



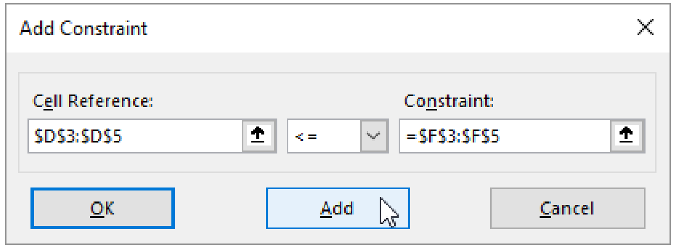
Metode Simpleks: Excel Solver (lanjutan)

- *Set Objective* → sel yang akan berisi nilai optimal
- *To: Max, Min, Value Of* → jenis nilai optimal (maksimal, minimal atau value of (nilai dari).
- *By Changing Variable Cells* → sel yang berisi nilai variabel (x_1 dan x_2).
- Tekan tombol *Add* untuk memberi kendala/batasan.

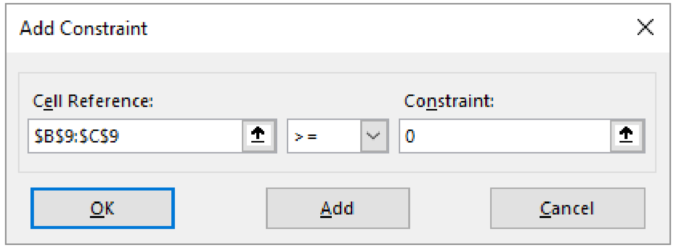


Metode Simpleks: Excel Solver (lanjutan)

- *Cell Reference* → sel berisikan fungsi kendala/batasan
  - Isi dengan nilai D3 sampai D5
- *Constraint* →sel yang berisi nilai kendala/batasan
  - Isi dengan F3 sampai F5
- Kemudian tekan tombol *Add* untuk menambahkan batas bawah (*lower bound*)

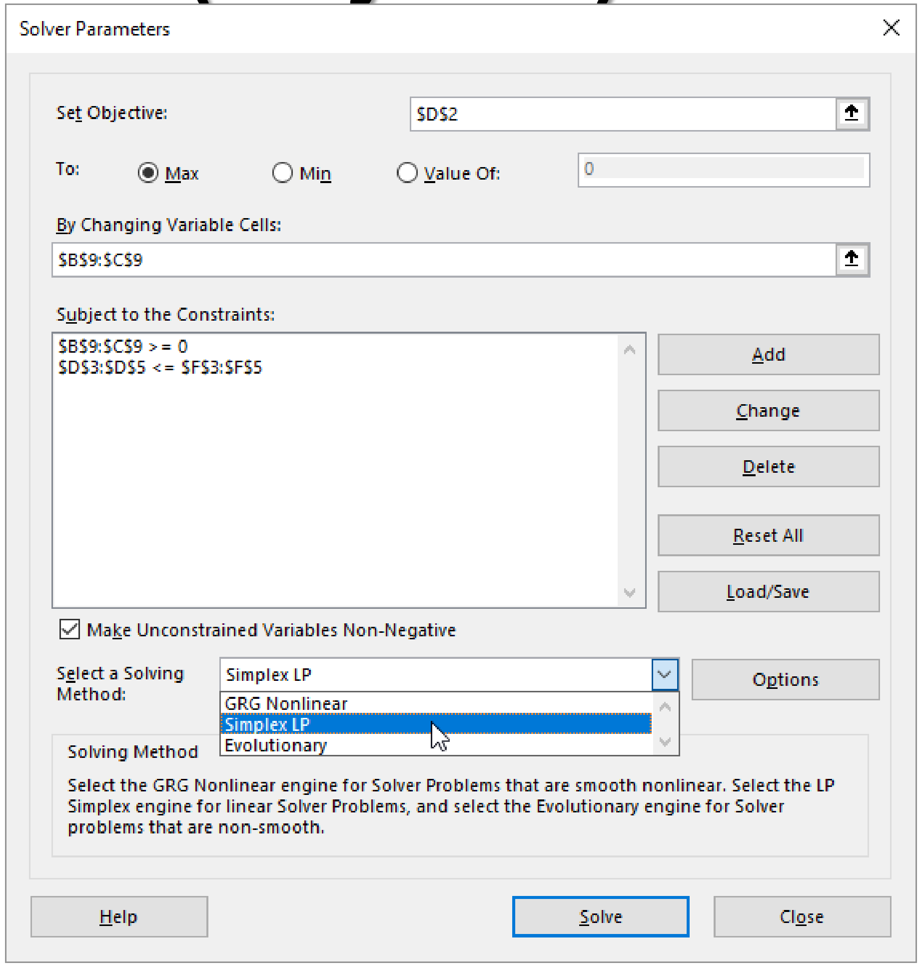


- Isi sel acuan dengan B9 dan C9. Ubah tanda menjadi >=. Isikan 0 pada *Constraint*. Tekan OK.

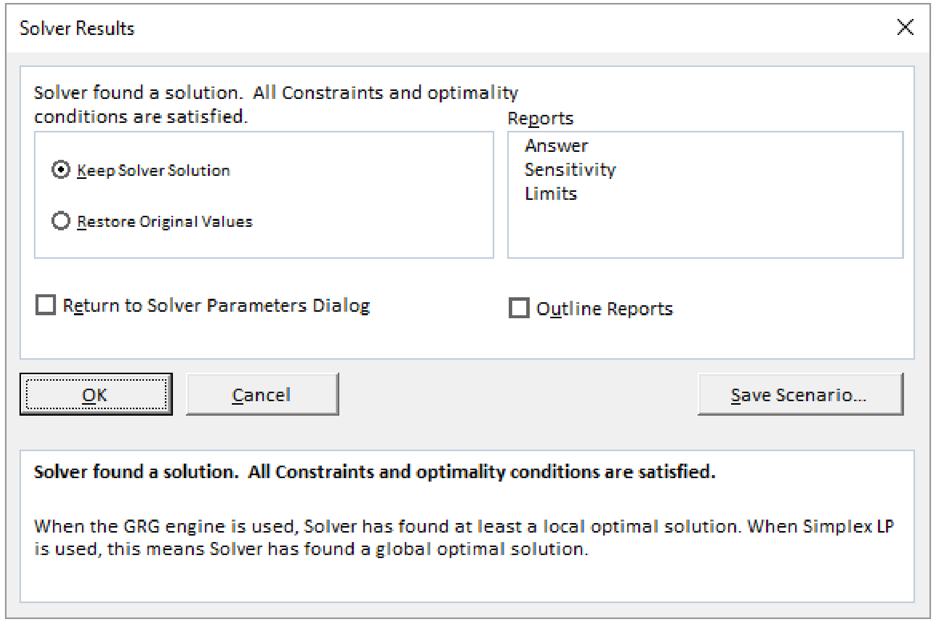


Metode Simpleks: Excel Solver (lanjutan)

- Pastikan pilihan nilai *Select a Solving Method* → *Simplex LP*
- Tekan *Solve*

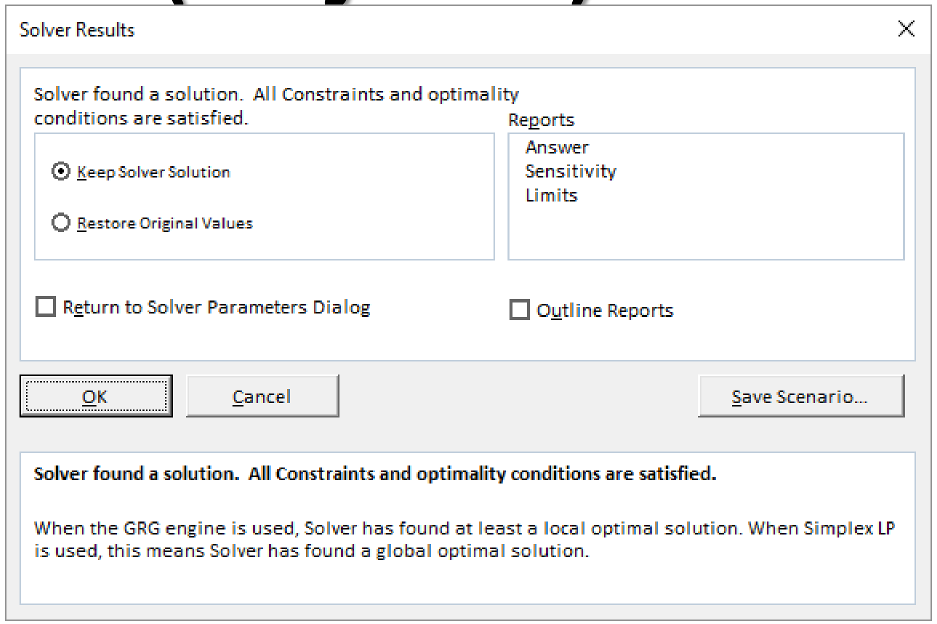


- Akan muncul *window* seperti berikut ini. Tekan OK.



Metode Simpleks: Excel Solver (lanjutan)

- Pilih jenis report. Jika ingin menyimpan skenario, pilih tombol *Save Scenario*.
- Tekan OK, bila semua sudah selesai.



	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	Total	<, >, =	Batasan
2	Maks	3	2	180		
3	Kendala1	2	1	100	<=	100
4	Kendala2	1	1	80	<=	80
5	Kendala3	1	0	20	<=	40
6	Batas bawah	0	0			
7						
8		x1	x2	Z		
9	Solusi	20	60	180		

- Terlihat bahwa solusi optimal (Maks) adalah:
  - $X_1 = 20$
  - $X_2 = 60$
  - $Z = 180$

Teknik M

- M, big M, adalah konstanta “yang (sangat, cukup sekali) besar – *sufficiently large, big constant*”

1. Transformasikan LP → bentuk baku: ZMaks → (-) MR, ZMin → (+) MR
2. Bila mempunyai R
   - Pindahkan R ke ruas kiri
   - Masukkan persamaan R ke Z
3. Tentukan BV dan NBV
4. Masukkan tabel
5. Optimal?
   - ZMaks → optimal jika var pada Z sudah (+) semua
   - ZMin → optimal jika var pada Z sudah (-) semua
6. EV
   - ZMaks → pada Z cari yang paling (-)
   - ZMin → pada Z cari yang paling (+)
7. LV
   - Rasio = solusi/EV, syaratEV harus (+)
   - Rasio terkecil
8. Pivot → perpotongan antara EV & LV
9. Lakukan OBE untuk membuat koefeisien EV (pivot) bernilai 1 dan 0 pada baris lainnya
10. Kembali ke langkah 5

Teknik M: Min

- Soal:

  Min Z = $3x_1 + 5x_2$

- Fungsi kendala:

  $x_1 \le 4$

  $2x_2 = 12$

  $3x_1 + 2x_2 \ge 18$

  $x_1, x_2 \ge 0$

Teknik M: Min (lanjutan)

- Transformasikan ke bentuk baku:

  $$\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_3 + MR_2 + MR_3$$

- Fungsi kendala:

  $x_1 + S_1 = 4$

  $2x_2 + R_2 = 12$

  $3x_1 + 2x_2 - S_3 + R_3 = 18$

  $x_1, x_2, S_1, S_3, R_2, R_3 \geq 0$

Teknik M: Min (Langkah-langkah)

1. Lakukan substitusi terhadap R_2, R_3

   $R_2 = 12 - 2x_2$

   $R_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 + S_3$

2. Masukkan ke dalam persamaan Z

   $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_3 + M(12 - 2x_2) + M(18 - 3x_1 - 2x_2 + S_3)$

   $Z = (-3M+3)x_1 + (-4M+5)x_2 + 0S_1 + MS_3 + 30M$

   $Z - (-3M+3)x_1 - (-4M+5)x_2 - 0S_1 - MS_3 = 30M$

Tabel Iterasi Min

Itr	BV	Z	x_1	x_2	S_1	S_3	R_2	R_3	Solusi	Keterangan
1	Z	1	3M-3	4M-5	0	-M	0	0	30M	M adalah "big constraint"
	S_1	0	1	0	1	0	0	0	4	0 & (-) sbg pembagi → diabaikan
	R_2	0	0	2	0	0	1	0	12	12/2 = 6
	R_3	0	3	2	0	-1	0	1	18	18/2 = 9
2	Z	1	3M-3	0	0	-M	(-2M+5/2)	0	6M+30	$R'_0 = (-2M+5/2)R_2 + R_0$
	S_1	0	1	0	1	0	0	0	4	$R'_1 = R_1$
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6	$R'_2 = R_2 / 2$
	R_3	0	3	0	0	-1	-1	1	6	$R'_3 = -R_1 + R_3$
3	Z	1	0	0	0	-1	(-M+3/2)	-M+1	36	$R''_0 = (-M+1)R'_3 + R'_0$
	S_1	0	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2	$R''_1 = (-1/3)R'_3 + R'_1$
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6	$R''_2 = R'_2$
	x_1	0	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	$R''_3 = R'_3 / 3$

Z = 36 $x_1 = 2$ $x_2 = 6$

Teknik M: Maks

- Soal:

  Maks Z = $3x_1 + 8x_2$

- Fungsi kendala:

  $-8x_1 + 2x_2 \geq 15$

  $-2x_1 - 7x_2 \leq 20$

  $-9x_1 + 3x_2 = 24$

Teknik M: Maks (lanjutan)

- Transformasikan ke bentuk baku:

  Maks $Z = 3x_1 + 8x_2 – MR_1 – MR_2$

- Fungsi kendala:

$$
\begin{aligned}
-8x_1 + 2x_2 – S_1 + R_1 &= 15 \\
-2x_1 - 7x_2 \quad + S_2 &= 20 \\
-9x_1 + 3x_2 \quad + R_3 &= 24
\end{aligned}
$$

$$R_1 = 15 + 8x_1 – 2x_2 + S_1$$

$$R_3 = 24 + 9x_1 – 3x_2$$

Teknik M: Maks (lanjutan)

- Masukkan R_1 dan R_2 ke Z

$$Z = 3x_1 + 8x_2 – MR_1 – MR_2$$

$$= 3x_1 + 8x_2 – M(15 + 8x_1 – 2x_2 + S_1)$$

$$– M(24 + 9x_1 – 3x_2)$$

$$= (3 – 17M)x_1 + (8 + 5M)x_2 – MS_1 - 39M$$

$$Z + (-3 + 17M)x_1 + (- 8 - 5M)x_2 + MS_1 = - 39M$$

Teknik M: Maks (lanjutan)

	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	R_3	Solusi
Z	-3 + 17M	-8 – 5M	M	0	0	0	-39M
R_1	-8	2	-1	1	0	0	15
S_2	-2	-7	0	0	1	0	20
R_3	-9	3	0	0	0	1	24
Z	-3M - 35	0	-3/2M - 4	4+2.5M	0	0	-3/2M + 60
x_2	-4	1	-0,5	0,5	0	0	7,5
S_2	-30	0	-3,5	3,5	1	0	72,5
R_3	3	0	1,5	-1,5	0	1	1,5
Z	0	0	13,5	M - 13,5	0	M + 35/3	77,5
x_2	0	1	1,5	-1,5	0	1,33	9,5
S_2	0	0	11,5	-11,5	1	10	87,5
x_1	1	0	0,5	-0,5	0	0,33	0,5

Jadi $x_1 = 0.5$

$x_2 = 9,5$

$Z = 3x_1 + 8x_2 = 77,5$

Teknik 2 Fase

- Tujuan → untuk menghilangkan M
- Caranya → terbagi dalam 2 fase: fase 1 dan fase 2
- Fase 1
  - Transformasikan LP ke bentuk baku
  - Untuk R → jadikan Min $r = R_1 + R_2$
  - Masukkan ke tabel dengan fungsi tujuan: Min $r = R_1 + R_2$
  - Jika $r = 0$ maka *feasible*
    lanjutkan ke fase 2

Teknik 2 Fase (lanjutan)

- Fase 2
  - Dari fase 1 → diperoleh batasan baru, R hilang
  - Dari fase 1 → masukkan kembali ke fungsi Z semula
  - x_1 baru masukkan ke Z
  - x_2 baru
- Soal:

  $$\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2$$

- Fungsi kendala:

  $x_1 \le 4$

  $2x_2 = 12$

  $3x_1 + 2x_2 \ge 18$

  $x_1, x_2 \ge 0$

Teknik 2 Fase: Contoh

- Soal:

  $$\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2$$

- Fungsi kendala:

  $x_1 \leq 4$

  $2x_2 = 12$

  $3x_1 + 2x_2 \geq 18$

  $x_1, x_2 \geq 0$

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Jawaban
- Fase 1:
  - Transformasikan ke bentuk baku:
  - Min $Z = 3x_1 + 5x_2$
- Fungsi kendala

$$x_1 + S_1 = 4$$
$$2x_2 \quad + R_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 - S_3 + R_3 = 18$$
$$x_1, x_2, S_1, R_2, S_3, R_3 \geq 0$$

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Fungsi tujuan

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & r = R_2 + R_3 \\
& r = (12 - 2x_2) + (18 + S_3 - 3x_1 - 2x_2) \\
& \;\; = 12 - 2x_2 + 18 + S_3 - 3x_1 - 2x_2 \\
\text{Min} \quad & r = (-3)x_1 + (-2 - 2)x_2 + S_3 + 30 \\
& r + 3x_1 - (-4)x_2 - S_3 = 30 \\
\text{Min} \quad & r + 3x_1 + 4x_2 - S_3 = 30
\end{aligned}
$$

- Masukkan ke tabel:
  - Var → x_1, x_2, S_1, R_2, S_3, R_3
  - BV → S_1, R_2, R_3
  - NBV → x_1, x_2, S_3

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

↓ EV (kolom x_2)

		x_1	x_2	S_1	R_2	S_3	R_3	Solusi	
	r	3	4	0	0	-1	0	30	
	S_1	1	0	1	0	0	0	4	r = ~
LV ←	R_2	0	2 pivot	0	1	0	0	12	r = 12/2 = 6 → LV
	R_3	3	2	0	0	-1	1	18	r = 18/2 = 9
	r	3 EV	0	0	-2	-1	0	6	
	S_1	1	0	1	0	0	0	4	r = 4/1 = 4
	x_2	0	1	0	1/2	0	0	6	r = ~
LV ←	R_3	3 pivot	0	0	-1	-1	1	6	r = 6/3 = 2 → LV
	r	0	0	0	-1	0	-1	0	
	S_1	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2	
	X_2	0	1	0	1/2	0	0	6	
	X_1	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	

Karena r = 0 → dilanjutkan ke fase 2

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Batasan/kendala baru:

  $S_1 + 1/3\ S_3 = 2$
  $x_2 = 6$
  $x_1 – 1/3\ S_3 = 2 \rightarrow x_1 = 2 + 1/3\ S_3$

- Masukkan kembali ke Z:

  Min $Z = 3x_1 + 5x_2$
  $= 3\ (2 + 1/3\ S_3) + 5\ (6)$
  $= 6 + S_3 + 30$
  $= S_3 + 36$
  $Z – S_3 = 36$

  Min $Z + (-1)\ S_3 = 36$
  Var: x_1, x_2, S_1, S_3
  BV: x_1, x_2, S_1
  NBV: S_3

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Masukkan ke tabel

`	x_1	x_2	S_1	S_3	Solusi
Z	0	0	0	-1	36
x_1	1	0	0	-1/3	2
x_2	0	1	0	0	6
S_1	0	0	1	1/3	2

Optimal

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

$Z = 36$

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Soal:

  Maks $Z = 7x_1 + 4x_2$

- Fungsi kendala/batasan:

  $5x_1 – 3x_2 \leq 7$

  $4x_2 = 8$

  $-3x_1 + 8x_2 \geq 12$

- Fase 1
  - Transformasikan ke bentuk baku:

Maks $Z = 7x_1 + 4x_2$

Fungsi kendala $5x_1 – 3x_2 + S_1 = 7$

$4x_2 + R_2 = 8$

$-3x_1 + 8x_2 - S_3 + R_3 = 12$

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Fungsi tujuan:

  Min $r = R_2 + R_3$

  $r = (8 - 4x_2) + (12 + 3x_1 - 8x_2 + S_3)$

  $r = 3x_1 - 12x_2 + S_3 + 20$

  Min $r - 3x_1 + 12x_2 - S_3 = 20$

- Masukkan ke tabel:
  - Var: x_1, x_2, S_1, R_2, S_3, R_3
  - BV: S_1, R_2, R_3
  - NBV: x_1, x_2, S_3

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

↓ EV

		x_1	x_2	S_1	R_2	S_3	R_3	Solusi	Keterangan
	r	-3	12	0	0	-1	0	20	
	S_1	5	-3	1	0	0	0	7	(-) atau 0 sbg pembagi → diabaikan
	R_2	0	4	0	1	0	0	8	r = 8/4 = 2
LV ←	R_3	-3	8 pivot	0	0	-1	1	12	r = 12/8 – 1,5
	r	1,5 EV	0	0	0	0,5	-1,5	2	
	S_1	3.88	0	1	0	-0,38	0.38	11,5	r = 11,5/3,88 = 2,9
LV ←	X_2	1,5 pivot	0	0	1	0,5	-0,5	2	r = 2/1,5 = 1,3
	R_3	-3/8	1	0	0	-1/8	1/8	1,5	(-) → diabaikan
	r	0	0	0	-1	0	-1	0	
	S_1	0	0	1	-2,58	-1,67	1,67	6,33	
	X_2	1	0	0	0,67	0,33	-0,33	1,33	
	X_1	0	1	0	0,25	0	0	2	

Karena r = 0 → dilanjutkan ke fase 2

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Batasan/kendala baru:

  $S_1 - 1{,}67\ S_3 = 6{,}33$

  $x_1 + 0{,}33\ S_3 = 1{,}33 \rightarrow x_1 = 1{,}33 - 0{,}33\ S_3$

  $x_2 = 2$

- Masukkan kembali ke Z:

  $$\begin{aligned} \text{Maks } Z &= 7x_1 + 4x_2 \\ &= 7\ (1{,}33 - 0{,}33\ S_3) + 4\ (2) \\ &= -0{,}33\ S_3 + 17{,}33 \\ Z + 0{,}33\ S_3 &= 17{,}33 \end{aligned}$$

  Maks $Z + 0{,}33\ S_3 = 17{,}33$

  Var: x_1, x_2, S_1, S_3

  BV: x_1, x_2, S_1

  NBV: S_3

Teknik 2 Fase: Contoh (lanjutan)

- Masukkan ke tabel

	x_1	x_2	S_1	S_3	Solusi	
Z	0	0	0	0,33	17,33	Optimal
x_1	1	0	0	0,33	1,33	x_1 = 1,33
x_2	0	1	0	0	2	x_2 = 2
S_1	0	0	1	-1,67	6,33	Z = 17,33