

Penerapan Jaringan Saraf Runge Kutta-Fungsi Basis Radial dan Metode Nonlinier Recursive Least-Square pada Identifikasi Sistem Dinamis

Rully Soelaiman¹, Egawati Panjei¹ dan Irfan Subakti.¹

¹ Fakultas Teknologi Informasi,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Surabaya, 60111, Indonesia
E-mail: rully@its-sby.edu

Abstrak – Sistem dinamik yang dinyatakan dalam persamaan diferensial biasa (PDB) dapat diidentifikasi dengan menggunakan jaringan saraf tiruan (JST) Fungsi Basis Radial (FBR). Seperti diketahui metode Runge Kutta dapat digunakan untuk memperoleh solusi numerik PDB. Karena itu timbul gagasan untuk merangkai beberapa JST FBR mengikuti persamaan Runge Kutta.

JST Runge Kutta-Fungsi Basis Radial (RKFBR) yang akan dibahas meliputi RKFBR orde dua serta RKFBR orde empat. RKFBR orde dua merupakan JST yang terdiri dari dua buah FBR yang dirangkai mengikuti persamaan Runge Kutta orde dua. Sementara RKFBR orde empat merupakan JST yang terdiri dari empat buah FBR yang dirangkai mengikuti persamaan Runge Kutta orde empat. Pembelajaran pada setiap JST ini dilakukan dengan menggunakan teknik gradient descent serta metode Nonlinier Recursive Least Square (NRLS).

Pengujian dilakukan pada tiga kasus yakni persamaan Van der Pol, benda jatuh serta Lorenz. Hasil uji coba menunjukkan training dengan RKFBR baik orde dua maupun orde empat metode NRLS lebih cepat konvergen dibandingkan training dengan teknik gradient descent. Selain itu diperoleh kesimpulan bahwa prediksi dengan RKFBR orde empat lebih akurat dibandingkan RKFBR orde dua.

Kata kunci: metode Runge Kutta, Fungsi Basis Radial, gradient descent, Recursive Least Square.

I. PENDAHULUAN

Sistem dinamik merupakan sistem yang perilakunya berubah terhadap waktu. Perubahan pada sistem dinamik merupakan solusi persamaan diferensial biasa (PDB) [3], [4] :

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (1)$$

Dimana fungsi $f(x(t))$ tidak diketahui [7].

Metode Runge Kutta menghasilkan solusi numerik PDB [9]. Karena itu muncul gagasan menerapkan metode Runge Kutta untuk merangkai FBR menjadi RKFBR untuk identifikasi sistem

dinamik [1], [2], [5] Permasalahan yang akan diangkat dalam paper ini meliputi:

- Penerapan metode Runge Kutta pada JST FBR.
- Identifikasi sistem dinamik dengan JST RKFBR.
- Struktur dan proses belajar JST RKFBR.
- Metode optimasi pada pembelajaran RKFBR.

II. RUNGE KUTTA FUNGSI BASIS RADIAL

RKFBR yang dibahas berupa RKFBR orde dua serta RKFBR orde empat. Kedua JST ini akan digunakan untuk mengidentifikasi sistem dinamik seperti pada persamaan (1) Dimana lintasan dari sistem dinamik yang akan dilatih = $\{x(i; x_0) | i = 0, \dots, L-1, x_0 \in D\}$.

a) RKFBR orde dua

RKFBR orde dua terdiri dari dua FBR yang dirangkai berdasarkan metode Runge Kutta orde dua [9]. Gambar 1 menunjukkan arsitektur RKFBR orde dua. Aliran sinyal input yang menghasilkan output dinyatakan sebagai berikut:

$$y(i+1) = y(i) + \frac{1}{2} h(k_0 + k_1) \quad (2)$$

$$k_0 = N_f(y(i); w_{k_0}, t_{k_0}, \sigma_{k_0}) \quad (3)$$

$$k_1 = N_f(y(i) + hk_0; w_{k_1}, t_{k_1}, \sigma_{k_1}) \quad (4)$$

Di mana N_f menyatakan JST FBR, w = bobot, t = pusat FBR, serta σ = jarak antar pusat FBR.

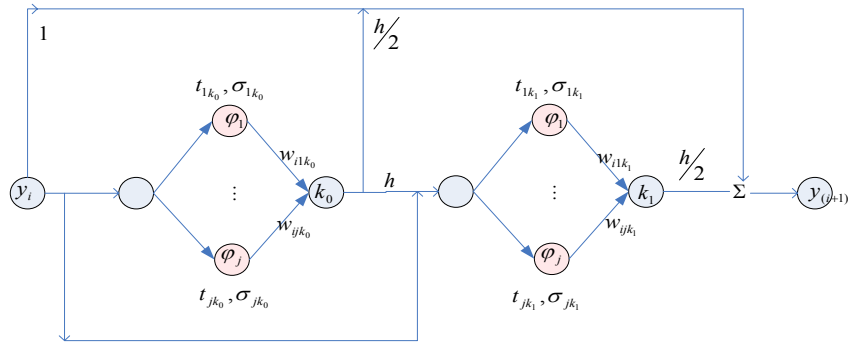
Pada hidden layer pada masing-masing FBR dilakukan formulasi dengan menggunakan fungsi gaussian:

$$\varphi_j = \exp\left(-\frac{(\text{input} - t_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad (5)$$

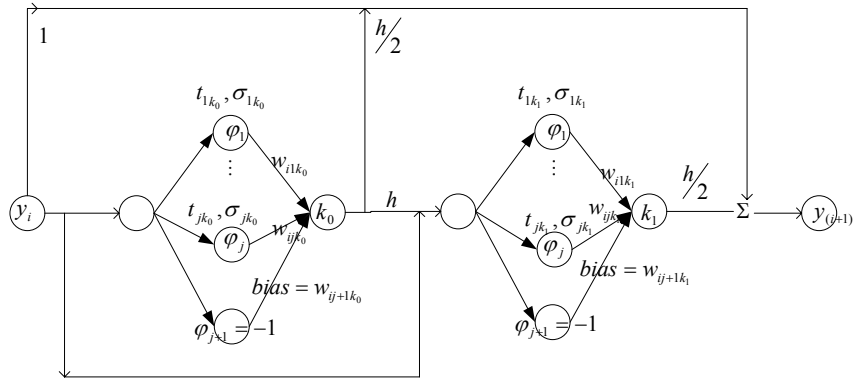
Selanjutnya pada masing-masing output layer RKFBR dilakukan formulasi:

$$\text{output} = \Phi w \quad (6)$$

Dimana Φ merupakan matriks yang komponennya berisi nilai φ_j .



Gambar 1. Arsitektur RKFBR orde dua



Gambar 1. Arsitektur RKFBR orde dua dengan bias

Penambahan bias pada arsitektur RKFBR orde dua perlu dilakukan pada kasus tertentu. Hal ini dilakukan dengan mengasumsikan nilai bias sama dengan bobot pada indeks ke-j+1 dan nilai $\varphi_{j+1} = -1$. Arsitektur RKFBR orde dua dengan bias dapat dilihat pada gambar 2.

Training pada RKFBR orde dua terkait dengan ruang hipotesis yakni melakukan perubahan pada bobot w , pusat/center t serta jarak antar pusat σ guna meminimalisasi squared error yang didefinisikan pada persamaan (7). Error yang dihasilkan kemudian dirambatkan kembali ke belakang untuk melakukan formulasi pada bobot dan bias.

Squared error didefinisikan sebagai berikut:

$$E(n) = \|x_{(i+1)} - y_{(i+1)}\|^2 \quad (7)$$

Dimana :

x_{i+1} = target pada lintasan yang ke- $i+1$

y_{i+1} = output RKFBR lintasan yang ke- $i+1$

Teknik *gradient descent* mencari gradien error terhadap bobot w , pusat/center t serta jarak antar pusat σ dengan cara merambatkan sinyal error yang terletak di belakang ke depan. Gradien error untuk setiap parameter dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial E}{\partial w} = \frac{\partial E}{\partial y_{i+1}} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial w} \quad (8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial y_{i+1}} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{\partial E}{\partial y_{i+1}} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial \sigma} \quad (10)$$

Jika ω mewakili parameter yang dicari yakni w , t serta σ maka gradien output RKFBR terhadap ω pada masing-masing FBR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} = -2(x_{i+1} - y_{i+1}) \quad (11)$$

$$\frac{\partial y_{(i+1)}}{\partial \omega} = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial k_0}{\partial \omega} + \frac{\partial k_1}{\partial \omega} \right) \quad (12)$$

Dimana :

$$\frac{\partial k_0}{\partial w_j} = \frac{\partial N_f(y_{(i)}, w)}{\partial w_j} \quad (13)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial w_j} = \frac{\partial N_f(y_{(i)} + hk_0, w)}{\partial w_j} \frac{\partial k_0}{\partial w_j} h + \frac{\partial N_f(y_{(i)} + hk_0, w)}{\partial w_j} \quad (14)$$

Update pada bobot, pusat serta jarak antar pusat dilakukan sebagai berikut:

$$\omega(n+1) = \omega(n) - \eta \frac{\partial E(n)}{\partial \omega(n)} \quad (15)$$

Langkah-langkah training/pelatihan pada RKFBR orde dua untuk identifikasi sistem dinamik dapat dilihat pada algoritma 1:

Algoritma 1. Algoritma Training/Pelatihan Identifikasi Sistem Dinamik dengan RKFBR

```

1  $y(1,n) \leftarrow x(1,n)$ 
2 for  $j \leftarrow 1$  to max epoch
3   do for  $i \leftarrow 2$  to length [target]
4     do
5       // aliran signal input/forward
6
7        $y(i,n) \leftarrow x(i-1,1) + \frac{1}{2} h(k_0 + k_1)$ 
8
9       // aliran signal output/backpropagation
10
11        $\frac{\partial E}{\partial w}, \frac{\partial E}{\partial t}, \frac{\partial E}{\partial \sigma}$  pada setiap  $N_f$ 
12
13       // update bobot, pusat serta jarak antar pusat
14
15        $w \leftarrow w - \eta \frac{\partial E}{\partial w}, t \leftarrow t - \eta \frac{\partial E}{\partial t}, \sigma \leftarrow \sigma - \eta \frac{\partial E}{\partial \sigma}$ 

```

Langkah-langkah aliran sinyal input/forward untuk memperoleh output RKFBR orde dua dapat dilihat pada algoritma 2.

Algoritma 2. Aliran sinyal input/ forward pada RKFBR orde dua

```

1  $yk_0 \leftarrow \varphi(x_i, t, \sigma)$ 
2  $k_0 \leftarrow \sum yk_0 \cdot w$ 
3  $yk_1 \leftarrow \varphi(x_i + hk_0, t, \sigma)$ 
4  $k_1 \leftarrow \sum yk_1 \cdot w$ 
5  $y_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} h(k_0 + k_1)$ 

```

b) RKFBR orde empat

RKFBR orde empat terdiri dari empat FBR yang dirangkai berdasarkan metode Runge Kutta orde empat [9]. Gambar 3 menunjukkan arsitektur RKFBR orde empat. Aliran sinyal input yang menghasilkan output dinyatakan sebagai berikut:

$$y(i+1) = y(i) + \frac{1}{6} h(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (16)$$

Dimana:

$$k_0 = N_f(y(i); w_{k_0}, t_{k_0}, \sigma_{k_0}) \quad (17)$$

$$k_1 = N_f(y(i) + hk_0; w_{k_1}, t_{k_1}, \sigma_{k_1}) \quad (18)$$

$$k_2 = N_f(y(i) + \frac{1}{2} hk_1; w_{k_2}, t_{k_2}, \sigma_{k_2}) \quad (19)$$

$$k_3 = N_f(y(i) + hk_2; w_{k_3}, t_{k_3}, \sigma_{k_3}) \quad (20)$$

Formulasi pada setiap FBR yang menyusun RKFBR orde empat ini sama dengan yang dilakukan pada persamaan (5) dan (6).

Seperti pada RKFBR orde dua training pada RKFBR orde empat juga dimaksudkan untuk

meminimalisasi squared error yang didefinisikan pada persamaan (7). Jika ω mewakili parameter yang dicari yakni w, t serta σ maka gradien output RKFBR terhadap ω pada masing-masing FBR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} = \frac{\partial E}{\partial y_{i+1}} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial \omega} \quad (21)$$

$$\frac{\partial y_{(i+1)}}{\partial \omega} = \frac{1}{6} h \left(\frac{\partial k_0}{\partial \omega} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial \omega} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial \omega} + \frac{\partial k_3}{\partial \omega} \right) \quad (22)$$

Dimana:

$$\frac{\partial k_0}{\partial \omega} = \frac{\partial N_f(y(i), \omega)}{\partial \omega} \quad (23)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \omega} = \frac{\partial N_f(y(i) + \frac{1}{2} hk_0, \omega)}{\partial \left(y_i + \frac{1}{2} hk_0 \right)} \frac{\partial k_0}{\partial \omega} \frac{1}{2} h + \quad (24)$$

$$\frac{\partial N_f(y(i) + \frac{1}{2} hk_0, \omega)}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial \omega} = \frac{\partial N_f(y(i) + \frac{1}{2} hk_1, \omega)}{\partial \left(y_i + \frac{1}{2} hk_1 \right)} \frac{\partial k_1}{\partial \omega} \frac{1}{2} h + \quad (25)$$

$$\frac{\partial N_f(y(i) + \frac{1}{2} hk_1, \omega)}{\partial \omega}$$

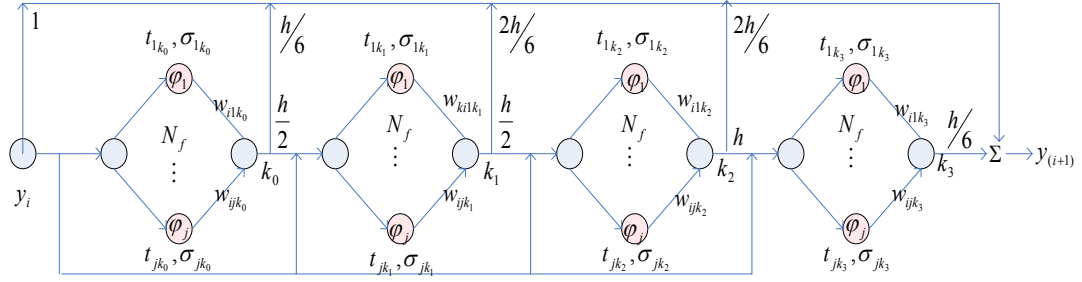
$$\frac{\partial k_3}{\partial \omega} = \frac{\partial N_f(y(i) + hk_2, \omega)}{\partial (y_i + hk_2)} \frac{\partial k_2}{\partial \omega} h + \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_f(y(i) + hk_2, \omega)}{\partial \omega}$$

c) Nonlinier Recursive Least Square (NRLS)

NRLS merupakan algoritma yang digunakan untuk melakukan penyesuaian pada bobot. Diasumsikan pusat serta jarak antar pusat sudah tidak berubah karena sebelumnya telah dicari dengan teknik *gradient descent*. Langkah-langkah algoritma NRLS:

- Lakukan inialisasi untuk bobot.
- Tentukan bentuk regresi nonlinear.
- Tentukan solusi *least square* untuk menghitung bobot dan selesaikan dengan algoritma RLS [6].
- Cek apakah bobot sudah konvergen, jika belum ulangi langkah c.



Gambar 3. Arsitektur RKFBR orde empat

NRLS yang akan dijelaskan berikut ini berupa NRLS zero order.

d) NRLS RKFBR orde dua

Diasumsikan lintasan dari suatu sistem dinamik yang akan dilatih:

$$\{x(i; x_0) | i = 0, \dots, L-1, x_0 \in D\}$$

Persamaan (20) dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$x(i+1) - x(i) = \frac{h}{2} \left\{ \phi^T(x(i))W + \phi^T(x(i))W + h \frac{\partial N_f}{\partial x} \Big|_{(x(i), W)} \phi^T(x(i))W \right\} \quad (27)$$

$$x(i+1) - x(i) = h \phi^T(x(i))W + \frac{h^2}{2} \frac{\partial N_f}{\partial x} \Big|_{(x(i), W)} \phi^T(x(i))W \quad (28)$$

$\phi^T(x_i)$ merupakan bentuk regresi non linear

$y_{i+1} - x_i$ dari RKFBR orde dua.

$$\phi^T(x_i) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{h}{2} \{ \phi_1(x_i) + \phi_1(x_i + hk_{1i}) \} \right] + \\ \left[\frac{h}{2} \{ \phi_2(x_i) + \phi_2(x_i + hk_{1i}) \} \right] + \dots + \\ \left[\frac{h}{2} \{ \phi_N(x_i) + \phi_N(x_i + hk_{1i}) \} \right] \end{array} \right\} \quad (29)$$

Jika:

$$Y_d = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_L - x_{L-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

merupakan matriks berukuran $[L \times 1]$

Dalam bentuk matriks, persamaan (27) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h \begin{bmatrix} \phi^T(x_0) + hM(x_0, W)\phi^T(x_0) \\ \vdots \\ \phi^T(x_{L-1}) + hM(x_{L-1}, W)\phi^T(x_{L-1}) \end{bmatrix} W = Y_d \quad (31)$$

Dimana:

$$M = \frac{1}{2} \frac{\partial N_f}{\partial x} \Big|_{(x_i, W)} \quad (32)$$

Dan jika FBR yang dipakai berupa fungsi gaussian pada persamaan (5) maka:

$$\frac{\partial N_f}{\partial x} \Big|_{(x_i, W)} = \sum_{j=1}^N W_j \phi_j \cdot \left(-\frac{(x_i - t_j)}{\sigma_j^2} \right) \quad (33)$$

Didefinisikan:

$$\mathcal{L}(x(0), x(1), \dots, x(L-1)) \equiv h \begin{bmatrix} \phi^T(x_0) \\ \vdots \\ \phi^T(x_{L-1}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

merupakan matriks berukuran $[L \times N]$, dan

$$D(W; x(0), x(1), \dots, x(L-1)) \equiv h \begin{bmatrix} M(x(0), W) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M(x(L-1), W) \end{bmatrix} \quad (35)$$

merupakan matriks berukuran $[L \times L]$

Jika $x = (x(0), x(1), \dots, x(L-1))$

$$[I + D(W; x) \times \mathcal{L}(x)W] = Y_d \quad (36)$$

$$\mathcal{L}(x)W = \frac{1}{[I + D(W; x)]} Y_d \quad (37)$$

Dengan demikian solusi least square dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut:

$$W = (\mathcal{L}^T(x)\mathcal{L}(x))^{-1} \mathcal{L}^T(x) \text{diag} \left(\frac{1}{1 + hM(x(0), W)} \right) Y_d \quad (38)$$

e) NRLS RKFBR Orde Empat

Diasumsikan lintasan dari suatu sistem dinamik yang akan dilatih:

$$\{x(i; x_0) | i = 0, \dots, L-1, x_0 \in D\}$$

Persamaan (26) dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$y_i = x_{i-1} + \frac{1}{6} h \left(\sum_{l=1}^N \phi_l(x_{i-1}) W_l + 2 \sum_{l=1}^N \phi_l \left(x_{i-1} + \frac{h}{2} k_{0,l-1} \right) W_l + 2 \sum_{l=1}^N \phi_l \left(x_{i-1} + \frac{h}{2} k_{1,l-1} \right) W_l + \sum_{l=1}^N \phi_l(x_{i-1} + hk_{2,l-1}) W_l \right) \quad (39)$$

Diperoleh bentuk regresi linear:

$$\phi^T(x_{i-1}; W) = \left[\begin{array}{c} \frac{h}{6} \left[\phi_1(x_{i-1}) + 2\phi_1\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{0,i-1}\right) + \right. \\ \left. 2\phi_1\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{1,i-1}\right) + \phi_1(x_{i-1} + hk_{2,i-1}) \right] + \\ \frac{h}{6} \left[\phi_2(x_{i-1}) + 2\phi_2\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{0,i-1}\right) + \right. \\ \left. 2\phi_2\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{1,i-1}\right) + \phi_2(x_{i-1} + hk_{2,i-1}) \right] + \dots + \\ \frac{h}{6} \left[\phi_N(x_{i-1}) + 2\phi_N\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{0,i-1}\right) + \right. \\ \left. 2\phi_N\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}k_{1,i-1}\right) + \phi_N(x_{i-1} + hk_{2,i-1}) \right] \end{array} \right] \quad (40)$$

Selanjutnya diperoleh solusi least square:

$$\begin{bmatrix} \phi^T(x_0; W) \\ \vdots \\ \phi^T(x_{L-1}; W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ \vdots \\ x_L - x_{L-1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Jika: $d^T = [x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_L - x_{L-1}]$ dan

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_{L-1}; W) = [\phi(x_1 - x_0), \dots, \phi(x_L - x_{L-1}); W]$$

Maka persamaan (41) dapat ditulis ulang:

$$W = \mathcal{L}^{-1}d \quad (42)$$

III UJI COBA DAN EVALUASI

Uji coba identifikasi sistem dinamik dengan menggunakan RKFBR dilakukan pada tiga kasus yakni: persamaan Van der Pol, persamaan benda jatuh serta persamaan Lorenz.

a) Persamaan Van der Pol

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial biasa yang menggambarkan perpanjangan osilasi yang energinya dipindahkan dari osilasi yang besar dan dimasukkan ke dalam osilasi yang kecil. Persamaan ini berkembang dalam studi tentang sirkuit yang berisi pembuluh hampa udara.

Persamaan Van der Pol merupakan bentuk sistem dinamik dan dinyatakan sebagai berikut:

$$y'' - (1 - y^2)y' + y = 0 \quad (43)$$

Bentuk di atas berupa persamaan diferensial orde dua dan dapat diubah ke dalam persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

Misalkan $y = x_2$ dan $y' = x_1$, maka (43) menjadi:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - (1 - x_2^2)x_1 + x_2 = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = (1 - x_2^2)x_1 - x_2 \quad (45)$$

Training dilakukan dengan mengambil titik awal [2, -1] dengan $h = 0.09$ serta η untuk teknik gradien descent = 0.2. RMSE yang diperoleh dapat dilihat pada tabel 1. Lintasan yang diperoleh dapat dilihat pada gambar 4

Tabel 1 Perbandingan RMSE RKFBR Van der Pol

JST	x_1	x_2
RKFBR orde 2 <i>G.Desc.</i>	0.1836	0.1424
RKFBR orde 2 NRLS	0.1833	0.1414
RKFBR orde 4 <i>G.Desc.</i>	0.1837	0.1396
RKFBR orde 4 NRLS	0.1833	0.1389

b) Persamaan Gerak Benda Jatuh

Kasus yang kedua adalah persamaan benda jatuh yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = -x_2(t) \quad (46)$$

$$\dot{x}_2 = -c_1 \exp(c_2 x_1(t)) x_2^2(t) \quad (47)$$

Di mana $c_1 = 3 \times 10^3$ merupakan koefisien gaya, $c_2 = -5 \times 10^{-5}$ merupakan kerapatan udara, $x_1 =$ ketinggian benda pada saat t , $x_2 =$ kecepatan benda pada saat t .

Sebuah benda jatuh dari ketinggian 200×10^3 kaki dengan kecepatan awal 16×10^3 . Lintasan yang dibentuk oleh benda tersebut selanjutnya diprediksi dengan menggunakan RKFBR. Training untuk kasus ini menggunakan RKFBR yang diberi bias. Time step/h = 0.09 serta η untuk teknik gradien descent = 0.2. RMSE yang diperoleh dapat dilihat pada tabel 2. Sementara lintasan hasil training dapat dilihat pada gambar 5.

Tabel 2. Perbandingan RMSE JST Runge Kutta kasus Benda Jatuh (10^3)

JST	x_1	x_2
RKFBR orde 2 <i>G.Desc.</i>	1.4491	0.3998
RKFBR orde 2 NRLS	0.5339	0.0573
RKFBR orde 4 <i>G.Desc.</i>	1.4839	0.4217
RKFBR orde 4 NRLS	0.5207	0.0339

Tabel 3. Perbandingan RMSE JST Runge Kutta kasus Lorenz

JST	z_1	z_2	z_3
RKFBR orde 2 <i>G.Desc.</i>	0.5558	0.8180	0.9791
RKFBR orde 2 NRLS	0.5553	0.8165	0.9778
RKFBR orde 4 <i>G.Desc.</i>	0.5557	0.8179	0.9790
RKFBR orde 4 NRLS	0.5552	0.8159	0.9778

c) Persamaan Lorenz

Lorenz attractor merupakan sistem nonlinier tiga dimensi yang digunakan untuk memodelkan konveksi acak/turbulen dalam fluida. Sistem ini dinyatakan dengan persamaan (48) – (50).

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \sigma(z_2 - z_1) \quad (48)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = (1 + \lambda - z_3)z_1 - z_2 \quad (49)$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} = z_1 z_2 - \gamma z_3 \quad (50)$$

Untuk uji coba nilai $(\sigma, \lambda, \gamma) = (10, 24, 2)$.

Training kasus Lorenz dilakukan dengan mengambil titik awal $[1, 0, 20]$, $h = 0.09$ dan $\eta = 0.2$.

RMSE yang diperoleh dapat dilihat pada tabel 3. Sementara lintasan hasil training dapat dilihat pada gambar 6 dan 7.

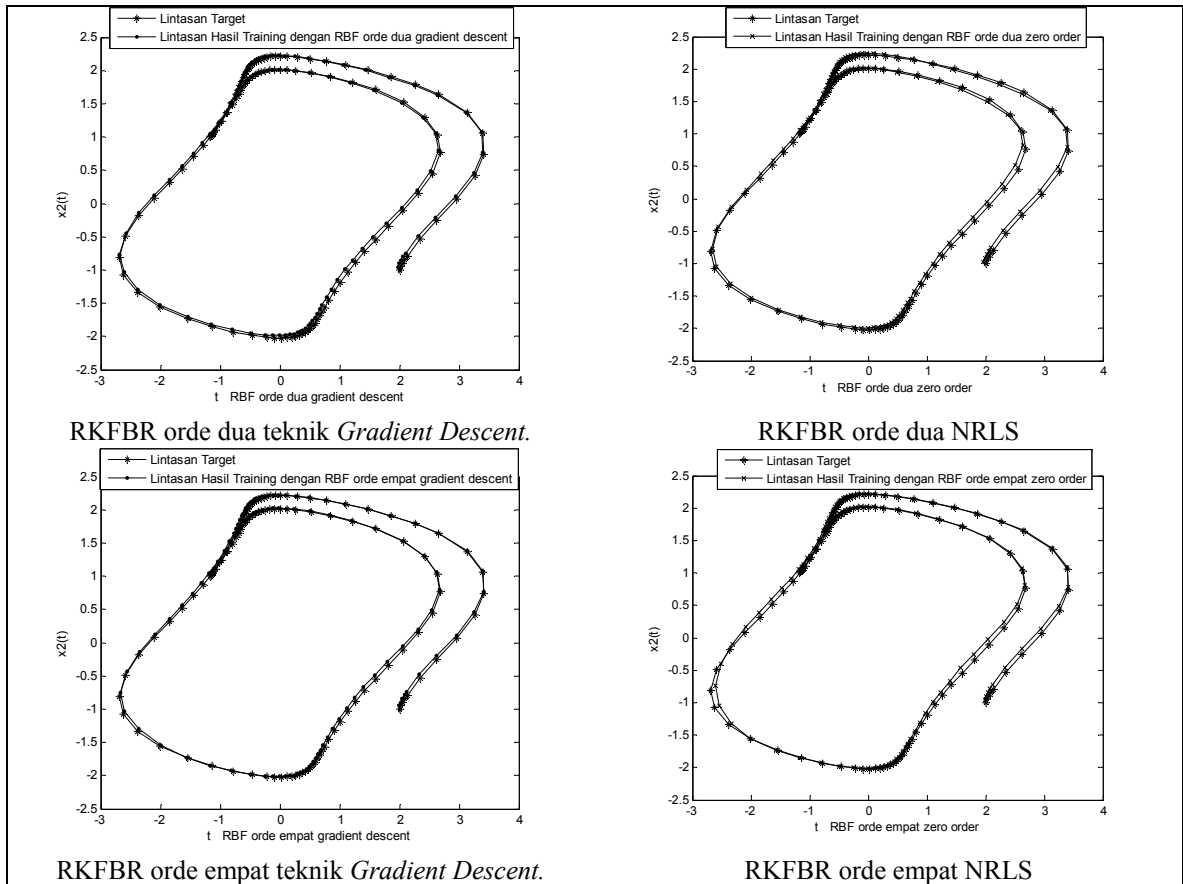
IV KESIMPULAN

Dari hasil uji coba dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

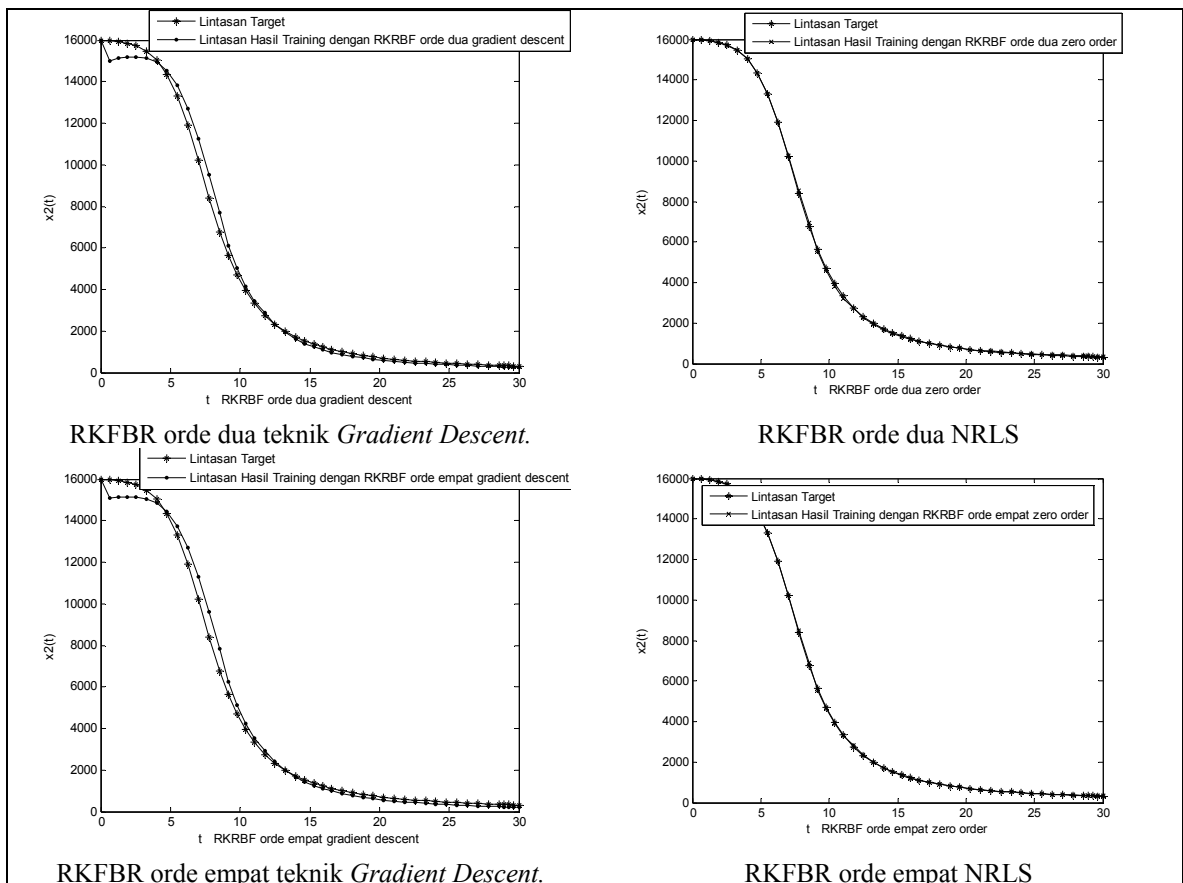
1. Berdasarkan grafik lintasan hasil fase training terhadap setiap persoalan yang diujicobakan, metode RKFBR teknik NRLS lebih cepat mencapai konvergen dibandingkan dengan RKFBR teknik *Gradient Descent*. Hal ini berlaku baik untuk RKFBR orde dua maupun RKFBR orde empat.
2. Berdasarkan hasil perbandingan RMSE, ditunjukkan bahwa metode training RKFBR orde empat teknik NRLS lebih akurat dibandingkan training RKFBR orde dua NRLS. Namun untuk teknik *Gradient Descent* hal ini tidak berlaku mutlak.

V. DAFTAR PUSTAKA

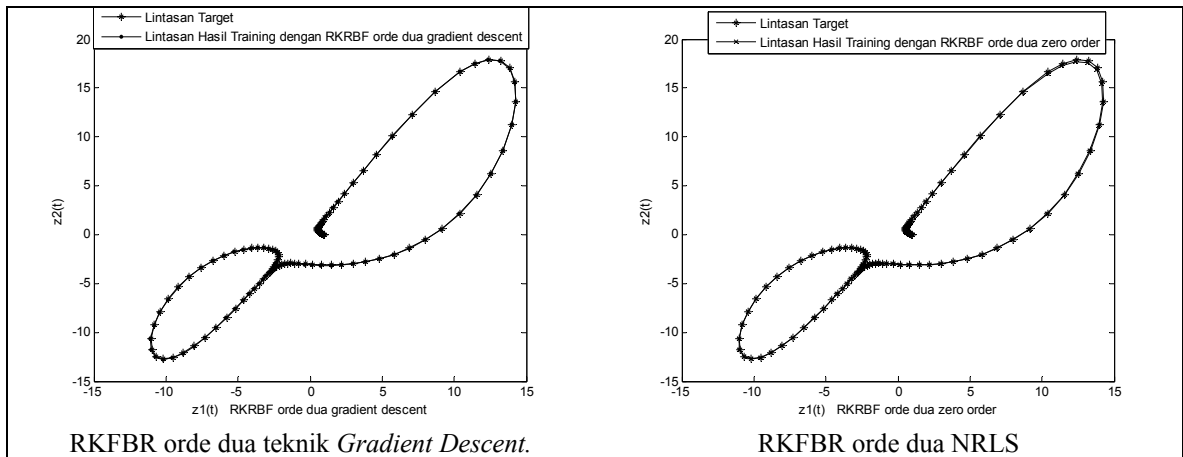
- [1] Yi Jen Wang and Chin Teng Lin, "Runge Kutta Neural Network for Identification of Dynamical System in High Accuracy", *IEEE Trans. Neural Networks*, 1998.
- [2] M. Onder Efe and Okyay Kaynak, "A Comparative Study of Soft-Computing Methodologies in Identification of Robotic Manipulator", *Robotic and Autonomous System* 30, pp. 221-230, 1999.
- [3] W. T. Miller, R. S. Sutton, and P. J. Werbos, "Neural Networks for Control", Cambridge, MA: MIT Press, 1990.
- [4] K. J. Hunt, D. Sbarbaro, R. Zbikowski, and P. J. Gawthrop, "Neural Networks for Control System: A Survey", *Automatica*, vol.28, no.6, pp.1083-1112. Nov, 1998.
- [5] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and Control of dynamical System Using Neural Networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.1, pp. 4-27, 1990.
- [6] T. K. Moon and W.C. Stirling, "Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing", Prentice-Hall Inc, 2000.
- [7] I. G. Petrovski, "Ordinary Differential Equations", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [8] S. Haykin. "Neural Network A Comprehensive Foundation Second Edition", Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1999.
- [9] Steven C. Chapra and Canale P. Raymond, "Numerical Methods for Engineers with Software & Programming Application", McGraw Hill, 2002.



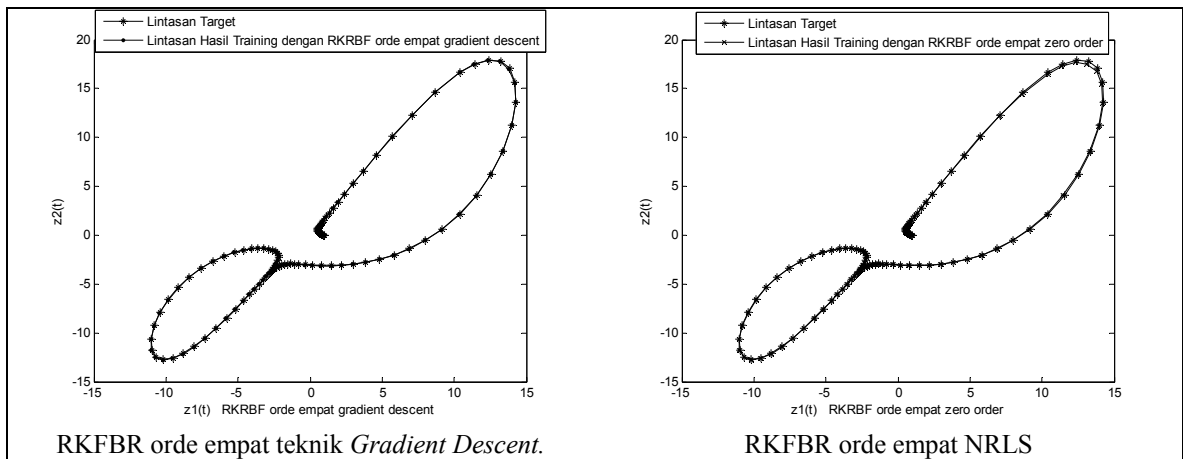
Gambar 4. Lintasan Van der Pol hasil training dengan RKFBR, titik awal [2,-1]



Gambar 5. Lintasan Benda Jatuh hasil training dengan RKFBR, titik awal [2,-1]



Gambar 6. Lintasan Lorenz hasil training dengan RKFBR orde dua



Gambar 7. Lintasan Lorenz hasil training dengan RKFBR orde empat